ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಎನ್ ಮನೋಹರ್

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಪ್ರಕಟಣೆ: 130

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಎನ್. ಮನೋಹರ್
ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು
ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಂಸ್ಥೆ, ರಾಯಚೂರು

1983

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಬೆಂಗಳೂರು-560065

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ: (ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡು ಸಂವಹನ ಸಮಿತಿ ಪ್ರಕಾಶಿತ)

ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ 1983, ಪ್ರತಿಗಳು 1000, ಪುಟಗಳು viii + 160

ಬೆಲೆ: ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ 15-00, ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ 25-00

ಮುದ್ರಕರು
ಪ್ರದೀಪ್ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್
5, ಕೋರಮಂಗಲ ಲೇಔಟ್, ಬೆಂಗಳೂರು-560 034

ಕುಲಪತಿಗಳ ಹಾರೈಕೆ

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಎರಡನೆಯ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಾವಿಂದು ಇದ್ದೇವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನೂರಕ್ಕೆ ಮಿಕ್ಕಿ ಹೊತ್ತಗೆಗಳು ಪ್ರಕಟಗೊಂಡಿವೆ. ಹತ್ತಾರು ಎರಡನೆಯ ಮುದ್ರಣಗೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ಇದು ಈ ಗ್ರಂಥಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಜನಮೆಚ್ಚುಗೆಯ ದ್ಯೋತಕ.

ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನಗಳು ಹಲವಾರು, ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಅಪಾರ. ಅವುಗಳ ಮಹತಿ ಹೆಚ್ಚಿನದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಜ್ಞಾನಸಂಪತ್ತು ಒಂದು ಮೇರು ಪರ್ವತ. ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನ ನಾಡಿಗರಿಗೆ ಹಾಗೂ ನಾಡಿಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆದಾಗ, ದೇಶದಲ್ಲಿ ಪುಷ್ಟಿ-ತುಷ್ಟಿ, ಭದ್ರತೆ-ಭವ್ಯತೆ, ಸುಖ-ಶಾಂತಿಗಳು ನೆಲೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೃಷಿಯ ಸಂದೇಶ ಹರಡಲನುವಾಗುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ದೇಶಸೇವೆಯ ಮಹತ್ ಕಾರ್ಯಗಳು.

ಒಂದು ದಶಕದ ಹಿಂದೆ ಮೊಳೆತ ಪೈರು, ಇಂದು ಹುಲುಸಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯದ ಮುಖ್ಯ ಹೇತುವಾದ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ನನಸಾಗಲು ಈ ಬೆಳೆ ಏತಕ್ಕೂ ಸಾಲದು. ವಿಜ್ಞಾನದ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ನೂರು ನೂರು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗಬೇಕು. ಆ ದಿನದ ಮೇಲೆ ಕಣ್ಣಿಟ್ಟು ಸಂಬಂಧಿಸಿದವರೆಲ್ಲರೂ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಕಾರ್ಯ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕೆಂದು ನನ್ನ ಕಳಕಳಿಯ ಹಾರೈಕೆ.

ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ, **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ** ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಹೆಜ್ಜೆ. ಇದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟವರೆಲ್ಲರೂ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಗಾಂಧಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಕೇಂದ್ರ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು – 560 065

ನಾ. ಗು. ಪೇರೂರ
ಕುಲಪತಿಗಳು

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಇದು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿರುವ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಐದನೆಯದು.

ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ, ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರ, ಸಂಬಂಧಿತ ಹಾಗೂ ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವಿಕೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ, ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ದೂರ ಈ ಅಂಶಗಳು ಚರ್ಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಸನಗಳಿವೆ.

ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಡಿಪ್ಲೊಮಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿಯಬೇಕಾದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಇದು ರಚಿತವಾಗಿದೆ. ಆದರೂ ಪಿ. ಯು. ಸಿ. ಯ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆಲ್ಲ ತುಂಬ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಲೇಖಕರು ರಾಯಚೂರಿನ ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು; ತಾಂತ್ರಿಕ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಿದವರು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾದ ಶ್ರೀ. ಎಚ್. ಎಂ. ತಿಮ್ಮರಾಯಪ್ಪ ಅವರು; ಒಳಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮುಖ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದವರು ವಿಭಾಗದ ಕಲಾವಿದರಾದ ಶ್ರೀ. ಕೆ. ವಿದ್ಯಾಧರಯ್ಯ ಅವರು; ಕರಡೋದಿಕೆಯನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಿದವರು ವಿಭಾಗದ ಕರಡೋದುಗಾರರಾದ ಶ್ರೀ ಎಂ. ರಮೇಶ್ ಅವರು. ಇವರಿಗೆಲ್ಲ ನಮ್ಮ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ಬೋಧಕರು ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರೆಂದು ಆಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ
ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು
ಹಾಗೂ
ಕನ್ನಡ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಮಿತಿಯ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು - 560 065

ಲೇಖಕರ ನುಡಿ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಡಿಪ್ಲೊಮಾ ಕೋರ್ಸಿನ ಎರಡನೆಯ ತ್ರೈಮಾಸಿಕ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯವಿಷಯವಾಗಿಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗವಾದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ವಿಷಯದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಡಿಪ್ಲೊಮಾ ಕೋರ್ಸಿಗೆ ವಿದಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಎಸ್. ಎಸ್. ಎಲ್. ಸಿ. ಆದನಂತರ ನೇರವಾಗಿ ನೋಂದಾಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹಳ ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಬಂದವರಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಠ ಹೇಳುವಾಗ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೂ ಪಾಠ ಹೇಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ದಿಸೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಒಂದು ಅಲ್ಪ ಪ್ರಯತ್ನ ಅಷ್ಟೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸರಳವಾದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆ ಸಹಿತ ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಡಿಪ್ಲೊಮಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆಂದೇ ರಚಿಸಿದ್ದರೂ ಪ್ರಿ ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿಯ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದರಿಂದ ಆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ನೆರವಾಗುವುದೆಂದು ನಂಬಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಮೂಲಕಾರಣ ಆಗ ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ. ಎಚ್. ಎಂ. ತಿಮ್ಮರಾಯಪ್ಪ. ಅವರು ನೀಡಿದ ಸಕಾಲಿಕ ಸಲಹೆ, ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಗಳಿಗೆ ನಾನು ಋಣಿ. ಈ ಕೃತಿಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹನೀಡಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ನೆರವಾದ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಾ। ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾದ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಸಿ. ಶ್ರೀಧರನ್ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಮಾನವಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ। ಆರ್. ನಾರಾಯಣ್, ಪುಸ್ತಕ ರಚಿಸುವಾಗ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಸಲಹೆ ನೀಡಿದ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾದ ಶ್ರೀ. ಜಿ. ಎನ್. ಕೆ. ಶೆಟ್ಟಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕ ರಚಿಸುವಾಗ ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಹಂಗಾಮಿ ಪ್ರಾಚಾರ್ಯರಾಗಿದ್ದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಕೆ. ಸಿ. ಚತುರ್ಭುಜನಾಥಯ್ಯ ಮತ್ತು ಈಗ ಪ್ರಾಚಾರ್ಯರಾಗಿರುವ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಎನ್. ಎಲ್. ಮೌರ್ಯ ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ನನಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಮೂಡಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ನನಗೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನನೀಡಿ ಪೋಷಿಸಿದ ನನ್ನ ಪೂಜ್ಯ ಮಾತೃಶ್ರೀಯರಾದ **ಶ್ರೀಮತಿ ಕೆಂಪಮ್ಮ** ಅವರಿಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಎನ್. ಮನೋಹರ್

ಪರಿವಿಡಿ

ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
10	11	$\sin\theta\cos\theta=1$	$\sin\theta.\mathrm{cosec}\theta=$
23	21	18.sinC sece	18.sin C sec C
52	3	28—35′	28°35′
53	9	ಲಫನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.	ಫಲನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
138	15	$\sin\phi$	$\sin\theta$
142	13	ಗೋವುರದ	ಗೋಪುರದ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಳತೆ

1.1: **ಪೀಠಿಕೆ**: ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗ. ಇದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದ್ದರೂ, ಇದರ ಉಪಯೋಗವು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಸರ್ವೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವಾಗ, ಜಮೀನಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತಗ್ಗುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸುವ ಒಂದು ಸಾಧನ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಆಸಕ್ತಿಯ ವಿಷಯವೆನಿಸೀತು. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಇಂಜಿನಿಯರುಗಳ ಒಂದು ಉಪಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

1.2: **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೇನು ?** ತ್ರಿಭುಜ ಅಥವಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಶಾಸ್ತ್ರ.

1.3: ತ್ರಿಕೋನವು ಮೂರು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಸರಳ ಆಕೃತಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಸಲೆ, ಸುತ್ತಳತೆ, ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ಅಂತವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗವು ಅವಶ್ಯಕ.

1.4: **ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಳತೆ**: ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಇಂಚು ಪಟ್ಟಿ ಅಥವಾ ಸ್ಕೇಲಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದಾಗ 'ಕೋನವು' ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.5: **ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನ**: ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯ ಮೂಲ ಮಾನವು 'ಒಂದು ಸಮಕೋನ' ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ 'ಒಂದು ಸಮಕೋನ' ವನ್ನು

ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.

ಒಂದು ಸಮಕೋನವು 90°ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

1.51: **ಸಮಕೋನ ಎಂದರೇನು ?** ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು ಒಂದು ಸಮಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮಕೋನವು ದೊಡ್ಡ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಅನೇಕ ಸಣ್ಣ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಕಂಡ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು:

1.6: **ಅಳತೆಯ ಮುಖ್ಯ ಪದ್ಧತಿಗಳು:** ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯ ಮುಖ್ಯ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ.

ಅ) ಷಟ್ಪ್ಡಶ ಅಥವಾ ಷಷ್ಟ್ಯಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು 90 ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು 'ಡಿಗ್ರಿ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು 'ನಿಮಿಷ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿಮಿಷವನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು 'ಸೆಕೆಂಡ್' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಸಮಕೋನ $= 90^\circ$
ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿ $= 60$ ನಿಮಿಷಗಳು
$(1^\circ = 60')$
ಒಂದು ನಿಮಿಷ $= 60$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು
$(1' = 60'')$

ಷಟ್ಪ್ಡಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು 'ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಪದ್ಧತಿ' ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಆ) ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಫ್ರಾನ್ಸ್ ದೇಶದವರು ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದುದಕ್ಕಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ '**ಫ್ರೆಂಚ್ ಪದ್ಧತಿ**' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲೂ ಸಹ ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದು

ಕೊಂಡಿವೆ. ಈ ಸಮಕೋನವನ್ನು ಒಂದುನೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು 'ಗ್ರೇಡ್' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ಗ್ರೇಡ್‌ಅನ್ನು ಒಂದು ನೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು 'ಶತಾಂಶ ನಿಮಿಷ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದು ಶತಾಂಶ ನಿಮಿಷವನ್ನು ನೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು 'ಶತಾಂಶ ಸೆಕೆಂಡ್' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಸಮಕೋನ = 100 (ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳು)

(ಒಂದು ಸಮಕೋನ = 100^g) 'g' ಎಂಬುದು ಗ್ರೇಡನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್ = 100 ಶತಾಂಶ ನಿಮಿಷಗಳು

$$(1^g = 100')$$

ಒಂದು ಶತಾಂಶ ನಿಮಿಷ = 100 ಶತಾಂಶ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು

$$(1' = 100'')$$

1.61: **ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ:**

ಒಂದು ಸಮಕೋನ = 90° (ಷಟ್ಡಶ ಪದ್ಧತಿ)

ಒಂದು ಸಮಕೋನ = 100^g (ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ)

$$\therefore 90^\circ = 100^g$$

ಅಥವಾ $1^\circ = \left\{\frac{100}{90}\right\}^g = \left\{\frac{10}{9}\right\}^g$

1·62: **Dಯು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು Gಯು ಗ್ರೇಡನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $\frac{D}{9}=\frac{G}{10}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ**

ಷಟ್ಡಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ದತ್ತಕೋನ Dಯನ್ನು ಸಮಕೋನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ $\frac{D}{90}$ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ದತ್ತಕೋನ Gಯನ್ನು 100 ಗ್ರೇಡಿನಿಂದ **ಭಾಗಿಸಿದರೆ** $\frac{G}{100}$ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇವೆರಡು ಭಿನ್ನಾಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುವು.

$$\therefore \frac{D}{90} = \frac{G}{100}$$

$$\therefore \frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) 28°ಯನ್ನು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

ಮೊದಲು 28°ಯನ್ನು 90 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ [ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ದಶಮಾಂಶದ ಆರು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ]. ನಂತರ ಬಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಆಗ ಮೊದಲನೆ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳು ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳನ್ನು, ನಂತರದ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳು ಶತಾಂಶ ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳು ಶತಾಂಶ ಸೆಕೆಂಡ್ ಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

90) 280 (0.311111 .... ಸಮಕೋನಗಳು
270
100
90
100
90
100
90
10 $\therefore$ 0.311111 ಸಮಕೋನಗಳು

$\therefore 28° = 31^g\ 11'\ 11''$

2) 133° 21′ 22″ ಗಳನ್ನು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

$$60'' = 1'$$

$$22'' = \frac{22}{60} \times 1' = 0.37'$$

$$60' = 1°$$

$$\therefore 21.37' = \left\{\frac{21.37}{60}\right\}^{\circ} = 0.35°$$

$$\therefore 133.35° = \frac{133.35}{90} = 1.481666 \text{ ಸಮಕೋನಗಳು.}$$

$$\therefore 133°\ 21'\ 22'' = 148^g\ 16'\ 66''$$

3) 35^g ಗಳನ್ನು ಷಟ್ಡಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

$35^g = 0.350000$ ಸಮಕೋನಗಳು.

$= 0.350000 \times 90$

$= 31.500000 \times 60$ (ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಅಂದರೆ, ಶವಮಾಂಶ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ 60 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು)

$= 30.000000$

$\therefore 35^g = 31^\circ 30' 00''$

4) $67^g\ 80'\ 17''$ಗಳನ್ನು ಷಟ್ಡಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

ಈಗ $67^g\ 80'\ 17'' = 0.678017$ ಸಮಕೋನಗಳು

$= 0.678017 \times 90$

$= 61.021530$ ಡಿಗ್ರಿಗಳು

ಈಗ 0.021530×60 ನಿಮಿಷಗಳು

$= 1.291800$ ನಿಮಿಷಗಳು

ಈಗ 0.291800×60 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು

$= 17.508000$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು

$\therefore 67^g\ 80'\ 17'' = 61^\circ 01' 17''$

ಅಭ್ಯಾಸ 1

ಅ) ಈ ಕೆಳಕಂಡವುಗಳನ್ನು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ

1) 78°
2) 35°
3) $139^\circ 85'$
4) $102^\circ 17'$
5) $170^\circ 18' 09''$
6) $49''$
7) $08' 08''$
8) $13^\circ 13' 13''$
9) $43'$
10) $27^\circ 00' 03''$
11) $06^\circ 07' 08''$

ಆ) ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಷಟ್ದಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

1] 55°
2] 130°
3] 112° 13′
4] 70° 28′
5] 65° 20′ 22″
6] 157° 31′ 03″
7] 09′ 09″
8] 47° 0′ 33″
9] 23° 55′
10] 2° 36′ 13″
11] 17° 54′ 32″
12] 57′ 12″

ಇ) ದಶಮಾಂಶದ ಆರು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

1] 81° 18′
2] 73° 05′
3] 14° 13′ 53″
4] 183° 0′ 76″
5] 51′ 42″
6] 22′ 18″
7] 15° 38′
8] 04° 40′ 17″
9] (56.27)°
10] 11° 09′ 59″

ಈ) a ಎಂಬುದು ಷಟ್ದಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು b ಎಂಬುದ ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉ) ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 69° ಮತ್ತು ಅವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 30° ಆದರೆ, ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಊ) x ಎಂಬುದು ಷಟ್ದಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದ ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2

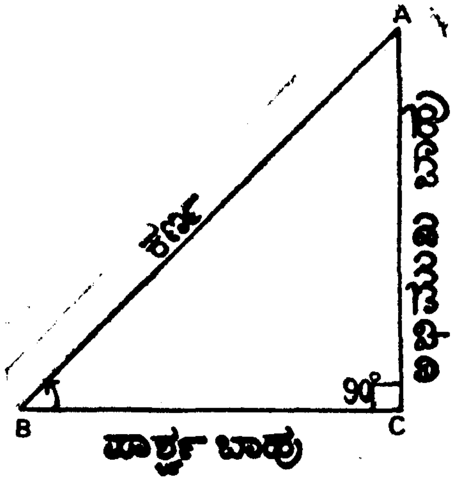
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

2.1: **ಪ್ರಮಾಣ:** ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ [ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ] ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 'ಪ್ರಮಾಣ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ: ರಾಮನ ವಯಸ್ಸು 14 ವರ್ಷಗಳು. ಚಂದ್ರನ ವಯಸ್ಸು 28 ವರ್ಷಗಳು ಆಗ ರಾಮ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರರ ವಯಸ್ಸಿನ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ 1:2 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ವಿ. ಸೂ: 'ಪ್ರಮಾಣ'ವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕೆಕ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಅಳತೆ ಇಲ್ಲ.

2.2: **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:** ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಅಥವಾ



ಚಿತ್ರ 1

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ **'ಸಂಖ್ಯೆ'**ಗೆ **'ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣ'** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ABC ಯು ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. ಅದರಲ್ಲಿ $\angle C = 90°$.

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವಿ ಕರ್ಣ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈಗ $\angle B$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಗಳ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\angle B$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹು 'AC' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\angle B$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು BC ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{AC}{AB}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ sin B ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{BC}{AB}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ cos B ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{AC}{BC}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ tanB ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸುಲಭ ವಿಧಾನಕ್ಕೋಸ್ಕರ, ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪ್ರಮಾ ಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ:

$$\sin B = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

$$\cos B = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

$$\tan B = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$$

ಚಿತ್ರ i ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, $\sin B = \frac{AC}{AB}$

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC}$$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು 'ಪ್ರಾಥಮಿಕ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣ' ಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಮಾಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ 'ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣ' ಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಅವುಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ:

ಚಿತ್ರ 1ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ,

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{AB}{AC}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$ ಇದನ್ನು ಕೊಸೆಂಟ್ B ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{AB}{BC}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$ ಇದನ್ನು ಸೆಕೆಂಟ್ B ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮಾಣ $\frac{BC}{AC}$ ಅಥವಾ $\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}$ ಇದನ್ನು ಕೊಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ B ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸಂಕಿಪ್ತವಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$$\operatorname{cosec} B = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sec B = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot B = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \frac{BC}{AC}$$

ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು 'ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣ'ಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

2:2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು:

ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ $\sin B = \frac{AC}{AB}$ $\operatorname{cosec} B = \frac{AB}{AC}$

$\therefore$ sin B. cosec B = 1. ಅಥವಾ $\sin B = \dfrac{1}{\text{cosec } B}$

ಅಥವಾ $\text{cosec } B = \dfrac{1}{\sin B}$

ಹೀಗೆಯೇ cos B. sec B = 1, ಅಥವಾ $\cos B = \dfrac{1}{\sec B}$

ಅಥವಾ $\sec. B = \dfrac{1}{\cos B}$

tan B cot B = 1, ಅಥವಾ $\tan B = \dfrac{1}{\cot B}$

ಅಥವಾ $\cot B = \dfrac{1}{\tan B}$

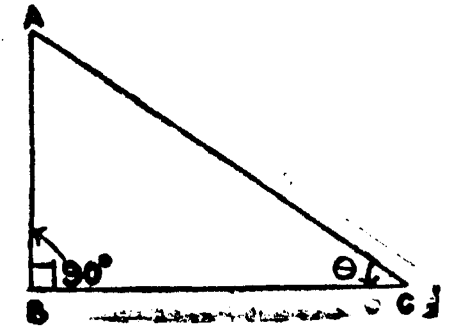
ಈಗ $\tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}} = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

ಹೀಗೆಯೇ $\cot B = \dfrac{\cos B}{\sin B}$

ಆದುದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು. B = θ, ಆದಾಗ,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin\theta\ \cos\theta = 1, \\ 2)\ \cos\theta\ \sec\theta = 1, \\ 3)\ \tan\theta\ \cot\theta = 1, \\ 4)\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ 5)\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array}\right\} \text{I}$$

.4:



ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. $\angle B — 90°$, $\angle ACB = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಪೈಥಾಗೊರಾಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. [1]

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನು AC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$1 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}$$

$\therefore 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ $\quad \because \frac{AB}{AC} = \sin\theta$ ಮತ್ತು

$$\frac{BC}{AC} = \cos\theta$$

ಸಮೀಕರಣ [1]ನ್ನು, ಈಗ AB^2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{BC^2}{AB^2}$$

i. e. $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ $\quad \because \frac{AC}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$ ಮತ್ತು

$$\frac{BC}{AB} = \cot\theta$$

ಪುನಃ ಸಮೀಕರಣ [1] ನ್ನು BC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2} + 1$$

i. e. $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \because \frac{AC}{BC} = \sec\theta$ ಮತ್ತು

$$\frac{AB}{BC} = \tan\theta$$

ಸೂತ್ರಗಳು :

$$\left.\begin{array}{ll} 6) & \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\ 7) & 1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta \\ 8) & 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \end{array}\right\} \text{II}$$

I ಮತ್ತು II ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾ ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಎಂಟು ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಅವಶ್ಯ ವಾದುವುಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲದೆ ಇನ್ನು ಎರಡು ಪ್ರಮಾಣಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳು 'ವರ್ಸ್ಡ್ ಸೈನ್' ಮತ್ತು 'ಕವರ್ಸ್ಡ್ ಸೈನ್'

ಒಂದು ಕೋನದ ವರ್ಸ್ಡ್ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕವರ್ಸ್ಡ್ ಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು ಈ ರ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ:

$$\text{vers}\theta = 1-\cos\theta \text{ ಮತ್ತು}$$
$$\text{covers}\theta = 1-\sin\theta$$

ಗಮನಿಸಿರಿ : $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ :

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta, \text{ ಅಥವಾ } \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\text{ಹೀಗೆಯೇ } \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ಡೂ ಕಡೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1$

ವಾ $1 + \tan^2\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

ವಾ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

ರೀತಿ, $\cos\theta$ ದ ಪರವಾಗಿ $\tan\theta$ ವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.
ಗೆಯೇ $\sin\theta$ ದ ಪರವಾಗಿಯೂ ಸಹ $\tan\theta$ ವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sin\theta = \tan\theta \cos\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

ಸುದರಿಂದ $\sin\theta$, $\cos\theta$, ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ದನ್ನು ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ತ್ರಗಳು :

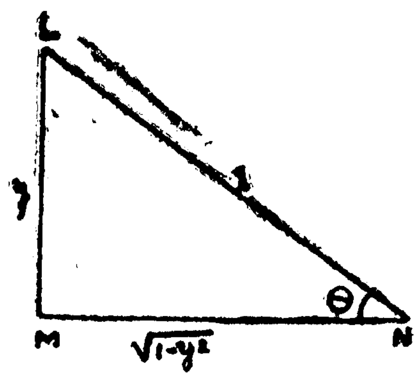
$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

) $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

3 $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

ಎರಡನೇ ವಿಧಾನ : ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು

ಅ) $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಗಳನ್ನು $\sin\theta$ ವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವಿಕೆ :



ಚಿತ್ರ 3

LMN ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ

ಅದರಲ್ಲಿ $\angle LNM=\theta, LN=1$

ಮತ್ತು $LM=y$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore MN=\sqrt{LN^2-LM^2}$

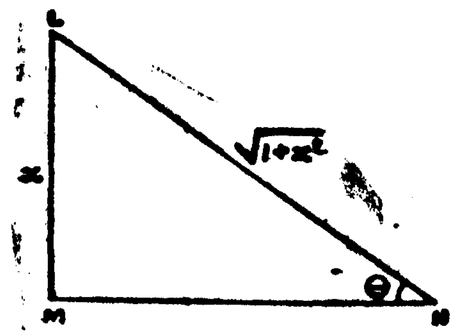
$=\sqrt{1-y^2}$

ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ $\sin\theta = \frac{LM}{LN} = \frac{y}{1} = y$

$$\therefore \cos\theta = \frac{MN}{LN} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{LM}{MN} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

ಅ) $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ಗಳನ್ನು $\tan\theta$ ವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವಿಕೆ :



ಚಿತ್ರ 4

$$\tan\theta = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}} = \frac{x}{1}$$

$$\sin\theta = \frac{LM}{LN} = \frac{LM/MN}{LN/MN} = \frac{x/1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{1}}}$$

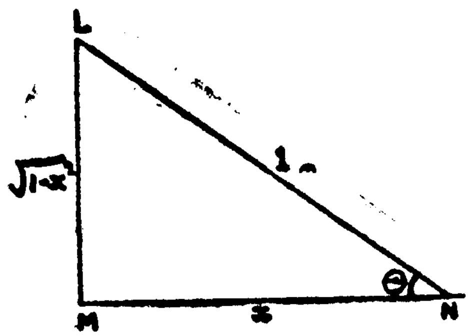
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

ಹಾಗೆಯೇ $\cos\theta = \frac{MN}{LN} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

ಇ) $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಗಳನ್ನು $\cos\theta$ ವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

ಬರೆಯುವಿಕೆ :



ಚಿತ್ರ 5

$$\cos\theta = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{LM}{LN} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{LM}{MN} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

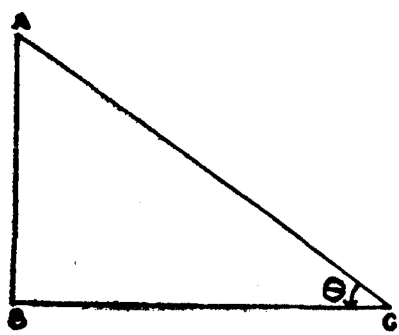
: ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಪರಮಾವಧಿಗಳು (ಬೆಲೆಗಳ ಮಿತಿಗಳು)

ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ರಿಂದ $\frac{\text{ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ ದ ಪ್ರಮಾಣವು ಯಾವಾಗಲೂ 1ಕ್ಕಿಂತ ಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕೋನದ sine ಅಥವಾ cosine ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಬಾಹು}}$ ವಿನ ಪ್ರಮಾಣವು 1ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ು ಕೋನದ Secant ಅಥವಾ cosecant ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ದಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ (ಕರ್ಣದ ಹೊರತು) ು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಚಿಕ್ಕ ಾರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$ ಮತ್ತು $\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಲಘು ೀನದ sine ಮತ್ತು cosine ಬೆಲೆಗಳು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರುತ್ತವೆ secant ಮತ್ತು secant ಬೆಲೆಗಳು 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ıgent ಮತ್ತು cotangent ಗಳಿಗೆ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಲ್ಲ.

ಃ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಪರಿಮಾಣಗಳು



ಚಿತ್ರ 6

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ

$\sin\theta = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ ಮತ್ತು

$\tan\theta = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$

ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಛೇದ ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಛೇದಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದ ಪ್ರಮಾಣವು ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಅಂದರೆ, } \sin\theta < \tan\theta \rightarrow \text{(i)}$$

ಹಾಗೆಯೇ $\tan\theta = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$ ಮತ್ತು $\sec\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಶವು ಎರ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣವು ಎರ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \tan\theta < \sec\theta \rightarrow \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $\sin\theta < \tan\theta < \sec\theta$

ಹೀಗೆಯೇ $\cos\theta < \cot\theta < \operatorname{cosec}\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಹೇಗೆಂದರೆ, $\cos\theta = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ ಮತ್ತು

$$\cot\theta = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಆದರೆ ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಛೇದವು ಎರಡ ಪ್ರಮಾಣದ ಛೇದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣವು ಎರ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇದೆ.

$$\text{ಅಂದರೆ } \cos\theta < \cot\theta \rightarrow \text{(iii)}$$

$$\text{ನಂತರ } \cot\theta = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}$$

ಮತ್ತು $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$

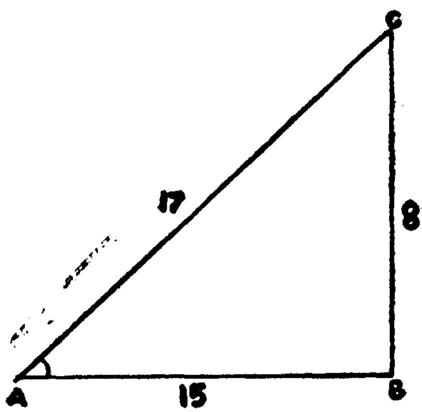
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಶವು ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ $\operatorname{cosec} \theta > \cot \theta$ i.e. $\cot \theta < \operatorname{cosec}\theta \rightarrow$ (iv)

$\therefore$ (iii) ಮತ್ತು (iv) ರಿಂದ $\cos\theta < \cot\theta < \operatorname{cosec}\theta$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $\sin A = \frac{8}{17}$ ಆದರೆ $\tan A$ ಮತ್ತು $\sec A$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore AB = 15$

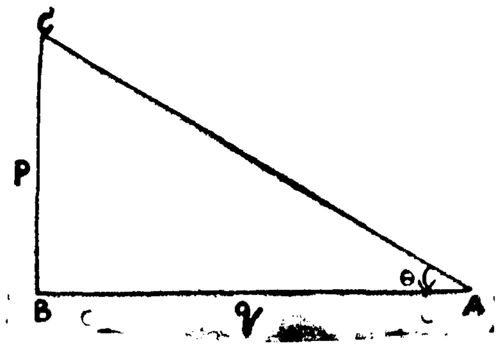
$\therefore \tan A = \frac{8}{15}$ ಮತ್ತು $\sec A = \frac{17}{15}$

2. $tan\theta = \dfrac{p}{q}$, ಆದರೆ $\dfrac{p\ sin\theta + q\ cos\theta}{p\ sin\theta - q\ cos\theta}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= p^2 + q^2$

$\therefore AC = \sqrt{p^2 + q^2}$



ಚಿತ್ರ 8

$$\therefore \sin\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \cos\theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$\therefore \frac{p\ \sin\theta + q\ \cos\theta}{p\ \sin\theta - q\ \cos\theta} = \frac{\dfrac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}} + \dfrac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2}}}{\dfrac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}} - \dfrac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2}}}$$

$$= \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$$

3. $\sin A + \operatorname{cosec} A = 3$ ಆದಾಗ $\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\sin A + \operatorname{cosec} A = 3$$

$$\therefore\ (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{i.e.} \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A = 9$$

$$\therefore \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 = 9$$

$$\therefore\ \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = 7$$

4. $\frac{\sqrt{1-\sin A}}{1+\sin A} = \sec A - \tan A$ ಎಂದುತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು $\sqrt{1-\sin A}$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}} \times \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}} = \frac{(\sqrt{1-\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1-\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}} = \frac{1-\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A - \tan A = \text{R.H.S.}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಅ)

1. $\sin P = \frac{7}{25}$ ಆದಾಗ, secP ಮತ್ತು cotPಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\cot P = \frac{21}{20}$ ಆದಾಗ, secP ಮತ್ತು sinPಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\sin \angle QPR = \frac{3}{5}$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. O ಎಂಬುದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ. P ಎಂಬುದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ 15ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ PQ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 12 ಸೆಂ. ಮೀ. ಆದರೆ $\angle QPO$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $\sin A + \operatorname{cosec} A = 5$ ಆದಾಗ, $\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $\cot\theta - \tan\theta = 8$ ಆದಾಗ $\cot^2\theta + \tan^2\theta = 66$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7. $sce\alpha - \cos\alpha = 7$ ಆದಾಗ $\sec^3\alpha - \cos^3\alpha$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

8. $\angle ABC$ಯು ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನ. $\cos C = 3/5$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. PQRS ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. PQ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 12 ಸೆಂ. ಮೀ. ಆದರೆ $\angle PQO$ನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. Oವು ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು.

10. $\sin\theta = \frac{s}{t}$ ಆದಾಗ $\sqrt{t^2 - s^2} = s \cot\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. $\frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = s$, ಆದಾಗ $s + \frac{1}{s} + 2$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\sin\theta = \frac{\sqrt{xy + x^2}}{x+y}$ ಆದಾಗ $\tan\theta + \cot\theta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $\tan\theta = \frac{r}{s}$ ಆದಾಗ, $\frac{r \sin\theta + s\cos\theta}{s\cos\theta - r\sin\theta}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಅ)

I. ಕೆಳಕಂಡವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

1. $\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{1-\cos\theta}=\text{cosec}+\cot\theta$
2. $(1-\cos^2\theta)\text{cosec}^2\theta=1$
3. $\sec^6\alpha-\tan^6\alpha=\cos^4\alpha+\tan^2\alpha\sec^2\alpha$
4. $\cot^4\alpha-\text{cosec}^4\alpha+1=3\text{cosec}^2\alpha$
5. $\sin^4 A-\sin^2=A\cos^2 A-\cos^4 A$
6. $\frac{1}{\text{cosec}A-\sin A}=\tan A\ \sec A$
7. $\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha+1}+\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha-1}=2\text{cosec}^2\alpha$
8. $\frac{\sec\alpha}{\text{sea}\alpha+1}-\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha-1}=-2\cot A\text{-cosec}A$
9. $\tan A.\ \text{cosec}A=\sec A$
10. $(1-\cos^2\theta)\ (1+\cot^2\theta)=1$
11. $(1-\sin^2\theta)\ (\sec^2\theta-1)=\sin^2\theta$
12. $\frac{\tan\theta-\cot\psi}{\tan\psi-\cot\theta}=\tan\theta\ \cot\psi$
13. $\frac{\text{cosec}A}{\sin A}-\frac{\cot A}{\tan A}=1$
14. $\cot^2\theta+\cot^4\theta=\text{cosec}^4\theta-\text{cosec}^2\theta$
15. $\sqrt{1+\tan^2\beta}.\sqrt{\text{cosec}^2\beta-1}.\ \sqrt{1-\cos^2\beta}=1$
16. $(\cos B+\sin B)^2+(\cos B-\sin B)^2=2$
17. $2\tan^2\alpha+\tan^4\alpha=\sec^2\alpha-1$
18. $\sin C\ \text{sece}\ \sqrt{\text{cosec}^2C-1}=1$
19. $(1+\cot^2\theta)\ (1-\cos^2\theta)=1$
20. $\text{cosec}^2\theta+\sec^2\theta=\sec^2\theta\ \ \text{cosec}^2\theta$
21. $(\cot\psi\sec\psi)^2-(\cos\psi\text{cosec}\psi)^2=1$
22. $(1-\sin\alpha+\cos\alpha)=2(1-\sin\alpha)\ (1-\cos\alpha)$
23. $\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{1-\sin\alpha}=2\sec^2\alpha$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

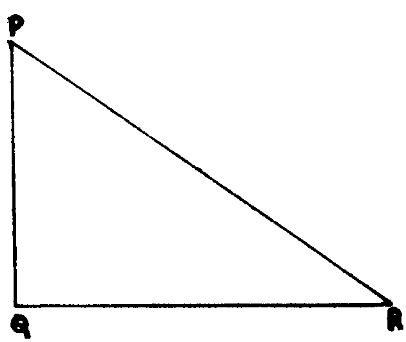
3:1. ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನ: ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 90°ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂಥಹ ಕೋನಗಳಿಗೆ 'ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನ' ಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: 54°ಯ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕವೇನು ?

$$90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

∴ 36°ಯು 54°ಯ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3.2: ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು



ಚಿತ್ರ 9

PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ Q ಕೋನವು 90°ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ P ಮತ್ತು Q ಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore P = 90° - R$, ಮತ್ತು $R = 90° - P$

$\sin(90° - P) = \sin R = \dfrac{PQ}{PR} = \cos P$ ಮತ್ತು

$\cos(90° - P) = \cos R = \dfrac{QR}{PR} = \sin P$

ಹೀಗೆಯೇ ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\tan(90° - P) = \cot P$ ಮತ್ತು

$\cot(90° - P) = \tan P$

$\sec(90° - P) = \text{cosec}\, P$

$\text{cosec}(90° - P) = \sec P$

ಈಗ $p = \theta$, ಆದರೆ,

$$\left.\begin{aligned} \sin(90° - \theta) &= \cos\theta, \\ \cos(90° - \theta) &= \sin\theta \\ \text{cosec}(90° - \theta) &= \sec\theta \\ \sec(90° - \theta) &= \text{cosec}\,\theta \\ \cot(90° - \theta) &= \tan\theta \\ \tan(90° - \theta) &= \cot\theta \end{aligned}\right\} \text{ ಆಗುವುವು.}$$

ಉದಾ: $\sin\theta = \cos\theta$ ಆದರೆ 'θ'ದ ಬೆಲೆಯೇನು ?

$\sin\theta = (90° - \theta)$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದರೆ $\sin\theta = \cos\theta$ (ದತ್ತ)

$\therefore \cos\theta = \cos(90° - \theta)$

$\therefore \theta = 90° - \theta$

i.e. $2\theta = 90°$

$\therefore \theta = 45°$

3.3: ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಆ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 'ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಅವ್ಯಕ್ತ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ 'ಸಮೀಕರಣಬಿಡಿಸುವಿಕೆ' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹಾಗೆ ಕಂಡುಹಿ ಕೋನದ ಬೆಲೆಗೆ 'ಸಮೀಕರಣದ ಬೆಲೆ' ಅಥವಾ 'ಸಾಧನ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1) $3\sec\theta = 4\cos\theta$ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$\frac{3}{\cos\theta} = 4\cos\theta$

$\frac{3}{4} = \cos^2\theta$

i.e. $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore \theta = \pm 30^\circ$

2) $2\sin(A+B) = \sqrt{3} \rightarrow (1)$

$\cot(A-B) = \sqrt{3} \rightarrow (2)$

$\sin(A+B) = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sin(A+B) = \sin 60^\circ \because \sin 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore A+B = 60^\circ \rightarrow (3)$ (ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿ

$\cot(A-B) = \sqrt{3}$

$\therefore \cot(A-B) = \cot 30^\circ$

$\therefore A-B = 30^\circ \rightarrow (4)$

$\therefore A+B = 60^\circ \rightarrow (5)$

ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ, $2A = 90^\circ$

$A = 45^\circ$

$\therefore B = 15^\circ$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

ಅ) ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

1) $35^\circ 40'$
2) $49^\circ 35' 16''$
3) 81.5°
4) $73{\cdot}65^\circ$
5) $0^\circ 55' 39''$

ಆ) PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle P = 25^\circ$ ಮತ್ತು Q ಕೋನವು 15°ಯ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನವಾದರೆ, R ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇ) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ A ಕೋನವು 30°ಯ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. B ಕೋನವು 40°ಯ ಪೂರಕಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ C ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ) LMN ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, M ಮತ್ತು N ಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು M ಕೋನವು N ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ L ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣವೇನು ?

ಉ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

1) $\cos(90^\circ - A)\ \tan(90^\circ - A) = \cos A$

2) $\sin\theta \cot(90^\circ - \theta) + \sin(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

3) $\sec^2(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha) = \sec^2\alpha$

4) $\dfrac{\sin(90^\circ - B)\sec(90^\circ - B)}{\tan(90^\circ - B)\cos(90^\circ - B)} = \operatorname{cosec} B$

5) $\dfrac{\cos(90^\circ - A)\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A)}{\cot(90^\circ - A)\sin(90^\circ - A)} = \sec A$

6) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta \tan^2\theta}{\cot(90^\circ - \theta)} \times \dfrac{\cot\theta}{\sec^2\theta} = \sec^2(90^\circ - \theta) - 1$

7) $\dfrac{\cot^2\phi \sin^2(90^\circ - \phi)}{\cot\phi + \cos\phi} = \tan(90^\circ - \phi) - \cos\phi$

8) $\cot^2\beta \operatorname{cosec}^2(90^\circ - \beta) - \cos^2\beta \sec^2(90^\circ - B) = 1$

9) $x \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \sin(90^\circ - A)$
ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10) x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
$x\tan(90^\circ - A) + \sec(90^\circ - A)\sin A = 1$

ಊ) ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

1. $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 2$
2. $19\cos^2\theta - \sin^2\theta - 14 = 0$
3. $\operatorname{cosec}^2\theta + \sin^2\theta = 2$
4. $3\sec\beta - 4\cos\beta = 0$
5. $3\tan\phi - \cot\phi = 0$
6. $4\sin A = 3\operatorname{cosec} A$
7. $6\cos B - 8\sec B + \tan B = 0$
8. $2\sin(3\theta + \phi) = \sqrt{3}$;
   $2\sin(3\phi + \theta) = 1$
9. $\cos(2A + 3B) = 1$;
   $\sin(A + 3B) = 1$
10. $\sqrt{3}\tan(\theta + 2\phi) = 1$;
    $2\sin(3\theta + \phi) = 1$
11. $2\sin(\alpha + \phi) = \sqrt{3}$
    $\sqrt{3}\tan(2\alpha - \beta) = 1$

3.4: ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ :

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡ ಹಿಡಿಯಲು ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಡಿಗ್ರಿಯಿಂದ 90 ಡಿಗ್ರಿಯವರೆಗೆ, ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿರಾಮಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಹಜ ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿರಾಮವು ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗ ಅಥವಾ 6 ನಿಮಿಷ (6′) ಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ದತ್ತಕೋನವು 6 ನಿಮಿಷಗಳ ಗುಣಕವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಭಾಗದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸೈನ್, ಸೀಕೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಕೋನಗಳು 0°ಯಿಂದ 90°ವರೆಗೆ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಕೊಸೈನ್, ಕೊಸಿಕೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಇಳಿಯುತ್ತವೆ.

ಉದಾ : 1. sin 39° 18′ } ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. sin 39° 20′ }

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1′	2′	3′	4′	5′
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಸಹಜ ಸೈನ್‌ದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಅಂದರೆ 39°ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶದ ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 39°ಯಿಂದ 40°ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

(1) 18′ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಾಲಮ್‌ನ ಕೆಳಗೆ 6334 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ. ದಶಮಾಂಶದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಎಡಭಾಗದ ಮೊದಲನೆ ಅಂಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಕೋನದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯು ಅಂದರೆ,

sin 39° 18′ =0.6334 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೋನವು $39^\circ 18'$ ಕ್ಕಿಂತ 2 ನಿಮಿಷಗಳು ದೊಡ್ಡ ದಾಗಿದೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ $2'$ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 4 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ 0.0004 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಈಗ } \sin 39^\circ 18' = 0\text{-}6334$$
$$\text{ವ್ಯತ್ಯಾಸ } 2' = 0.0004$$
$$\text{ಕೂಡುವುದರಿಂದ } \sin 39^\circ\ 20' = 0.6338$$

ಹೀಗೆಯೇ, ಕೋನಗಳ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಸೀಕೆಂಟ್ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಕೊಸಿಕೆಂಟ್, ಕೊಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಉದಾ :

$\cos\theta = 0.8952$ ಆದರೆ θ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1′	2′	3′	4′	5′
26°	8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6

$$\cos\theta = 0.8952$$
$$\cos 26^\circ 24' = 0.8957$$
$$\text{ವ್ಯತ್ಯಾಸ} = 0.0005$$

θವು $26^\circ\ 24'$ಕ್ಕಿಂತ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ 0.0005 ಅಂಕದ ನಿಮಿಷಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $4'$ಕ್ಕೆ $= 0.0005$

$$\therefore \theta = 26^\circ\ 24' + 4'$$
$$= 26^\circ 28'.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

ಅ) ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) $\sin 42^\circ 21'$
2) $\sin 18^\circ 15'$
3) $\sin 30^\circ 19'$
4) $\cos 55^\circ 14'$
5) $\cos 62^\circ 37'$
6) $\cos 78^\circ 45'$
7) $\tan 13^\circ 40'$
8) $\tan 38^\circ 15'$
9) $\tan 77^\circ 5'$
10) $\sec 41^\circ 32'$
11) $\operatorname{cosec} 15^\circ 30'$
12) $\cot 29^\circ 28'$

ಆ) ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

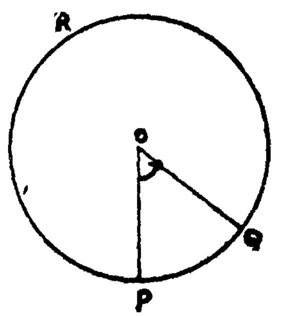
1) $\sin \alpha = 0{\cdot}8839$
2) $\sin \beta = 0{\cdot}5220$
3) $\tan \theta = 1{\cdot}6665$
4) $\tan \phi = 0.6754$
5) $\cos A = 0{\cdot}1905$
6) $\cos B = 0.7179$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ

ಅಧ್ಯಾಯ 1ರಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯ ಕೆಲವು ಪದ್ಧತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೂಲಮಾನ ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದೆವು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯ ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯಾದ 'ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ' ಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

4.1: **ರೇಡಿಯನ್**: ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಕಂಸವು, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ 'ರೇಡಿಯನ್' ಎಂದು ಹೆಸರು.



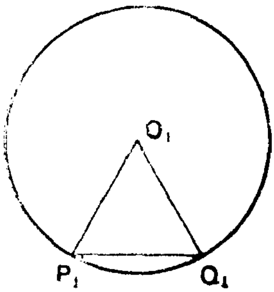
ಚಿತ್ರ 10

PQR ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ Oವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ. PQವು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕಂಸ. PQ ವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ∠POQ ವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ, PQ ಕಂಸವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನ. ∠POQ ಕೋನಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

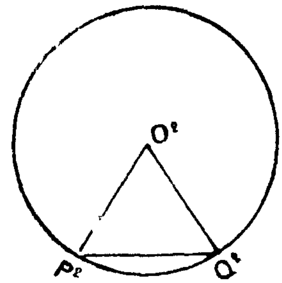
4.2: **ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗಳು, ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ:**

P_1Q_1 ಮತ್ತು P_2Q_2ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ

ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿನ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು. $P_1Q_1 = a_1$, $P_2Q_2 = a_2$. ಬಾಹುಗಳ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳಾದ O_1 ಮತ್ತು O_2ಗಳಿಗೆ



ಚಿತ್ರ 11 (i)



ಚಿತ್ರ 11 (ii)

ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದಲ್ಲದೆ, $\frac{1}{n}$ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿವೆ.

$$\therefore \frac{P_1Q_1}{O_1P_1} = \frac{P_2Q_2}{O_2P_2}$$

i.e. $\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2}$ [r_1 ಮತ್ತು r_2ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$$\therefore \frac{n_1}{r_1} = \frac{na_2}{r_2}$$

i.e. $\frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2}$ p_1ಮತ್ತು p_2ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು.

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯೇ ಆಗಿರಲಿ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಾದದ್ದು. ಆದ್ದರಿಂದ, nಗೆ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು, ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗಳಿಗೆ ಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ,

$$\boxed{\frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2}}$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

C_1 ಮತ್ತು C_2 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗಳು.

4.21 : $\frac{C_1}{r_1}=\frac{C_2}{r_2}$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$\therefore \quad \frac{C_1}{2r_1}=\frac{C_2}{2r_2}$

i.e. $\frac{C_1}{d_1}=\frac{C_2}{d_2}$ (d_1 ಮತ್ತು d_2 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಲಿ $\frac{\text{ವೃತ್ತಪರಿಧಿ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}}$ ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು π ಎಂಬ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ನಮೂದಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{22}{7}=3.1415$ ಗೆ ಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮ.

$$\therefore \frac{\text{ವೃತ್ತಪರಿಧಿ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}}=\pi$$

ಆದರೆ ವ್ಯಾಸ$=2$ತ್ರಿಜ್ಯ

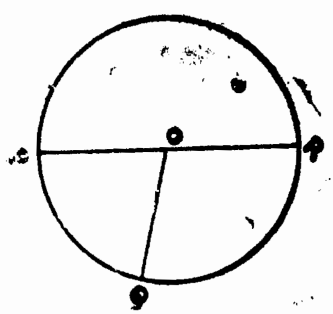
$$\therefore \frac{\text{ವೃತ್ತಪರಿಧಿ}}{2\text{ತ್ರಿಜ್ಯ}}=\pi.$$

ಈಗ C$=$ವೃತ್ತಪರಿಧಿ ಮತ್ತು r$=$ತ್ರಿಜ್ಯ ಆದಲ್ಲಿ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$\frac{C}{2r}=\pi$ ಆಗುತ್ತದೆ.

i.e. $C=2\pi r$

4.22 : π ರೇಡಿಯನ್$=$**180°**:



ಚಿತ್ರ 12

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, OP ತ್ರಿಜ್ಯ. PO ಕಂಸವು OP ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. OQ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ, $\angle POQ$ ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್. PO ವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯನ್ನು Rನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕಂಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{\angle POQ}{2\text{ ಸಮಕೋನ}} = \frac{\text{ಕಂಸ } PQ}{\text{ಅರ್ಧವೃತ್ತಪರಿಧಿ}} = \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

ಇದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬೆಲೆ.

$$\therefore \frac{\text{ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್}}{2\times 90^\circ} = \frac{1}{\pi} \text{ [ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ]}$$

$$\because \quad \boxed{\pi \text{ ರೇಡಿಯನ್} = 180^\circ}$$

ಅಥವಾ

$$\boxed{\text{ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್} = \frac{180}{\pi} \text{ ಡಿಗ್ರಿಗಳು}}$$

ವಿ. ಸೂ : π ರೇಡಿಯನ್ $= 180^\circ$

$$\therefore \frac{\pi}{2} \text{ ರೇಡಿಯನ್} = 90^\circ$$

ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿ $\frac{\pi}{2}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು $\frac{\pi}{2}$ ಎಂತಲೂ, π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು π ಎಂತಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ π ರೇಡಿಯನ್ ಎಂದು ಬರೆಯದೆ π ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಅದು π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \pi = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

ಉದಾ : 60°ಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲೂ, $\frac{\pi}{15}$ ನ್ನು ಷಷ್ಟಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೂ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ:

i] $\because 180^\circ = \pi$ ರೇಡಿಯನ್,

$$\therefore 60^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \times 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ ರೇಡಿಯನ್},$$

$$\therefore 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ ರೇಡಿಯನ್}$$

i.e. $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

ii] $\because \pi$ ರೇಡಿಯನ್ $= 180^\circ$

$\frac{\pi}{15}$ ರೇಡಿಯನ್ $= \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{15} = 12^\circ$

$\therefore \frac{\pi}{15}$ ರೇಡಿಯನ್ $= 12^\circ$

i.e. $\frac{\pi}{15} = 12^\circ$

ಗಮನಿಸಿರಿ : $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು

$45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು

ಇವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳು.

4.23 : **Dಯು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಮತ್ತು θ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ.**

$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}$ **ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.**

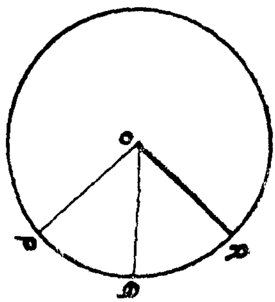
ಷಷ್ಟಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತಕೋನ ಮತ್ತು 2ಸಮಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳು $\frac{D}{180}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{\theta}{\pi}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಎರಡು ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \boxed{\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}}$$

.24: ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕಂಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ:



ಚಿತ್ರ 13

$\angle POR$ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೋನ

$\angle POQ$ ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್.

ಆಗ $\angle POR$ ಕೋನದ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯು

$$=\frac{\angle POR}{\angle POQ}=\frac{\text{ಕಂಸ } PR}{\text{ಕಂಸ } PQ}$$

$$=\frac{\text{ಕಂಸ } PR}{\text{ತ್ರಿಜ್ಯ}} \quad [\because PQ=OP=\text{ತ್ರಿಜ್ಯ}]$$

$$\therefore \angle POR \text{ನ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ} = \frac{\text{ಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕಂಸ}}{\text{ತ್ರಿಜ್ಯ}}$$

$S=PR$, $r=$ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು

$\theta=\angle POR$ (ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೋನ) ಆದರೆ,

ಆಗ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು $\theta=\frac{S}{r}$ ಆಗುತ್ತದೆ,

ಅಥವಾ $\boxed{S=r\theta}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

ಅ) ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ ($\pi=3.1416$ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು)

1) 45°
2) 38°
3) 150°
4) $24^\circ\ 30'$
5) $80^\circ\ 45'$
6) $30^\circ\ 45'\ 30''$
7) 27°
8) 135°
9) 140°
10) 105°

ಆ) ಷಷ್ಠಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

1) $\frac{3\pi}{4}$
2) $\frac{5\pi}{24}$
3) $\frac{2\pi}{3}$
4) $\frac{4\pi}{3}$
5) $\frac{2\pi}{5}$
6) $\frac{\pi}{15}$
7) $\frac{7\pi}{12}$
8) $\frac{\pi}{8}$
9) $\frac{3\pi}{8}$
10) $\frac{\pi}{7}$

ಇ) 4ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಕಂಸವು 1.2 ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳುಳ್ಳ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ) ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 1.92 ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳುಳ್ಳ ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2·8 ಮೀಟರ್ ಆದರೆ, ಕಂಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉ) 8.5 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2 ಮೀಟರ್ ಆದರೆ, ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

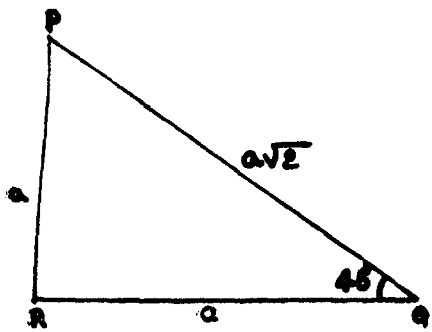
ಊ) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3ಕಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಆದರ ಕಂಸವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿದ್ದರೆ ಕಂಸವು, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಋ) ಒಂದು ಕಂಸವು ಪೃಥ್ವಿಯ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 1′ ವುಳ್ಳ ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಭೂಮಿಯು 12750 ಕಿ. ಮೀ. ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳವೆಂದು ತಿಳಿದು ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

5.1: 45°ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:



ಚಿತ್ರ 14

PQR ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

$\angle R=90^\circ,\ \angle P=\angle Q=45^\circ$

$PR=QR=a$

$\therefore PQ^2=PR^2+RQ^2$

$=a^2+a^2$

$=2a^2$

$\therefore PQ=a\sqrt{2}.$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{PR}{PQ}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PQ}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{QR}=\frac{a}{a}=1$$

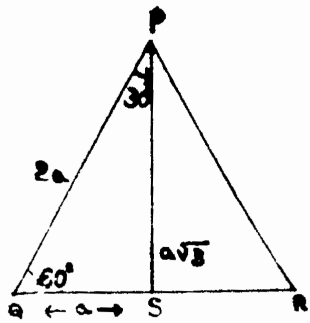
ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2},\ \sec 45^\circ = \sqrt{2},\ \cot 45^\circ = 1.$$

ಗಮನಿಸಿರಿ: $a = 1$ ಆದಾಗ, $PR = QR = 1,\ PQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಆಗಲೂ ಸಹ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

5.2: **30° ಮತ್ತು 60°ಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :**



ಚಿತ್ರ 15

PQR ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನಗಳು 60°ಗೆ ಸಮ. PS ನಿಂದ $\angle QPR$ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿರಿ. PS ಲಂಬ QR ಬಾಹುವನ್ನು Sನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ, $\angle QPS = 30^\circ$

PQS ಮತ್ತು PRS ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಎಲ್ಲ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿವೆ.

$\therefore QS = RS$ ಮತ್ತು $\angle PSR = 90^\circ$

PSQ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $QS = a$ ಮಾನಗಳು ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $PQ = PR = 2a$ ಮಾನಗಳು.

$$\therefore PS^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\therefore PS = a\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{PS}{PQ} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{QS}{PQ} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{PS}{QS} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

ಹಾಗೂ $\sin 30^\circ = \frac{QS}{PQ} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ = \frac{PS}{PQ} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{QS}{PS} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = 2$$

$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಮತ್ತು

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳು :

1) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

2) $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

4) $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6) $\operatorname{cosec} 45^\circ = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$

7) $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$

ಈಗ $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, ಮತ್ತು $60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

1) $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

3) $\tan \frac{\pi}{6} = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\tan \frac{\pi}{3} = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

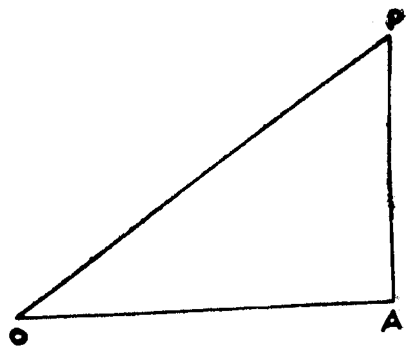
7) $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$ ಆಗುತ್ತವೆ.

5.3: $(\pi/2-\theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

ಅಧ್ಯಾಯ 2ರಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದೆವು. ಆದರಲ್ಲಿ $90° = \pi/2$ ಎಂದೂ, $P = \theta$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ,

$$\sin(90° - P) = \cos P$$
$$\therefore \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$$
ಹೀಗೆಯೇ $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$
$$\tan(\pi/2 - \theta) = \cot\theta$$
$$\operatorname{cosec}(\pi/2 - \theta) = \sec\theta$$
$$\sec(\pi/2 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\cot(\pi/2 - \theta) = \tan\theta$$

5.4: 0° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು



ಚಿತ್ರ 16

OA ಸರಳರೇಖೆಯು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ, $\angle AOP$ ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. $PA \perp OA$. ಈಗ OP ರೇಖೆಯು OA ಕಡೆಗೆ ಸರಿದಂತೆ, $\angle AOP$ ಕೋನವು ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\angle AOP$ ಕೋನವು 0° ಕಡೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ. ಆಗ AP ರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು ನಶಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ OP ರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು OA ರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ಕಡೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $OP = OA$ ಆಗುತ್ತದೆ ($OP \to OA$ ಮಿತ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ).

ಆದುದರಿಂದ,

$$\sin 0^\circ = \frac{AP}{OP} = \frac{0}{OA} = 0 \quad \left(\because OP \xrightarrow{\text{ಮಿತಿ}} OA\right)$$

$$\cos 0^\circ = \frac{OA}{OP} = \frac{OA}{OA} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{AP}{OA} = \frac{0}{OA} = 0$$

ಅಥವಾ $\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$

ಹೀಗೆಯೇ, $\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{OP}{AP} = \frac{AO}{0} = \infty$

$$\sec 0^\circ = \frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OA} = 1$$

$$\cot 0^\circ = \frac{OA}{AP} = \frac{OA}{0} = \infty$$

ಮೇಲಿನ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಸಹ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು :

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

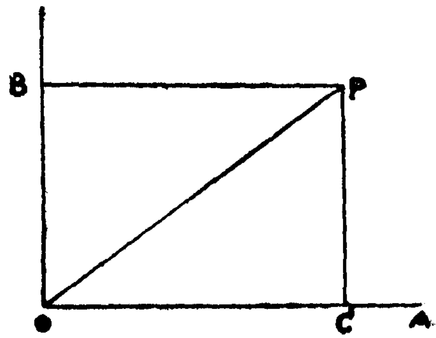
$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

5.5 : 90° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

$\angle AOP$ ಕೋನವು OA ರೇಖೆಯು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದಕೋನ. $\angle AOB = 90^\circ$ ಆಗಿರಲಿ. ಮತ್ತು $PC \perp OA$, $PB \perp OB$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ OPರೇಖೆಯು OBರೇಖೆಯ ಕಡೆ ಸರಿದಂತೆ, $\angle$AOPಕೋನವು 90° ಡಿಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ OC ರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು ನಶಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಿ, ಕೊನೆಗೆ ೊನ್ನೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ. ಆಗ OP=OB=PC ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು OC=0 ಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ.



ಚಿತ್ರ 17

$$\sin 90° = \frac{PC}{OP} = \frac{OB}{OB} = 1 \quad \begin{matrix}(\because PC \to OB) \\ (\ \ OP \to OB)\end{matrix}$$

$$\cos 90° = \frac{OC}{OP} = \frac{0}{BO} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{\sin\ 90°}{\text{con}\ 90°} = \frac{1}{0} = \infty$$

ಹೀಗೆಯೇ ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

cosec 90°=1, scc 90°=∞ ,ಮತ್ತು cot90° $= \frac{1}{\infty} = 0$.

$$\because \quad \frac{\pi}{2} = 90°,$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \ \text{cosec} \ \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \ \sec \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \infty, \ \cot \frac{\pi}{2} = 0$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1) $\tan 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ - \cot 60^\circ$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡ ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\tan 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ - \cot 60^\circ$

$$= \frac{\ }{\sqrt{3}} - 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{6} - 1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$$

$\tan^2 \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{4} \ \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$= \tan^2 60^\circ \cot 45^\circ + \sin 30^\circ \operatorname{cosec}^2 60^\circ$

$= (\sqrt{3})^2 \, 1 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^2$

$= 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$

ಅಭ್ಯಾಸ 5

ಅ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) $\sin^2 30^\circ + 2 \tan^2 30^\circ$
2) $(\operatorname{cosec} 45^\circ - 3 \cos 45^\circ)^2$
3) $3 \sin^2 60^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$
4) $3 \sin 30^\circ \cdot \cos^2 60^\circ \cot 45^\circ$
5) $\tan 60^\circ \cot^2 30^\circ \sin^2 90^\circ$
6) $\sin^2 45^2 \cos^2 30 + \tan^2 60^\circ \cot 45^\circ$

7) $\cos^2 45° + 3\cos^2 30° - 3\sin^2 45° + 5\sin^2 90°$

8) $\sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60° - \text{cosec} 90° \sec 60°$

9) $\cos 30° \cot^3 45° + \sin 60°$

10) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot 30° - \text{cosec}^2 45$

11. $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6}$

12) $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{4}$

13) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{\pi}{4}$

14) $\sec \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6} \cdot \text{cosec} \frac{\pi}{3}$

15) $\cot^2 \frac{\pi}{3} + 6\cos^2 \frac{\pi}{4} + 3\sec^2 \frac{\pi}{6}$

ಆ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1 $\cos\theta . \text{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \tan\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$

2 $\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sec \theta - \cot^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin\theta = 0$

3 $\sec^2\theta + \sec^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (1 + \tan^2\theta)\sec^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

4 $\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ಮತ್ತು $\cos\theta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$
ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 2 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

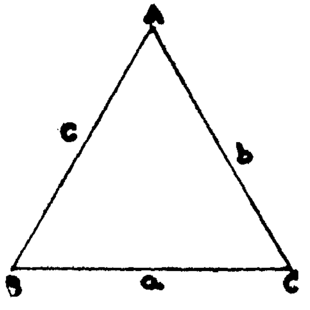
5 $\left(\frac{1 + \cot 60°}{1 - \cot 60°}\right)^2 = \frac{1 + \cos 30°}{1 - \cos 30°}$

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

6.1: ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿ. ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವು ಸಮಕೋನ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಹೆಸರು. ಆಗ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಕೋನಗಳನ್ನು A,B,C ಗಳಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a,b,c ಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. a,b ಮತ್ತು c ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, CA ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 18

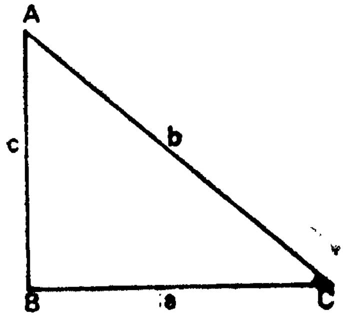
ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಲಘುಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು 'ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ವಿಧಾನಗಳು

ಅ) ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.

ಆ) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

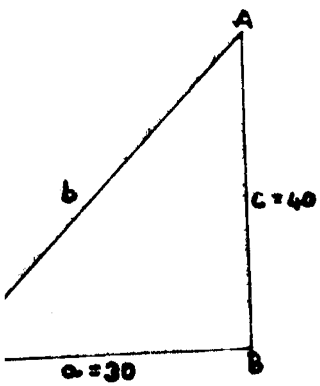
ಅ) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ



ಚಿತ್ರ 19

BC ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle B = 90°$. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ...ನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು $b^2 = c^2 + a^2$ ...ಣದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಹಾಗೂ $A = 90° - C$ ಮತ್ತು ... $= \frac{a}{b}$, ಈ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ A ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ...ಹುದು.

... ರೀತಿಯಾಗಿ, ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ...ದು.



ಚಿತ್ರ 20

ಉದಾ: 1) $B = 90°$ $a = 30$ ಮತ್ತು $c = 40$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$b^2 = a^2 + c^2$$
$$= 900 + 1600$$
$$= 2500$$
$$\therefore b = \sqrt{2500}$$
$$= 50$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6$$

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಹಜ ಸೈನ್‌ನಲ್ಲಿ 0.6ಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

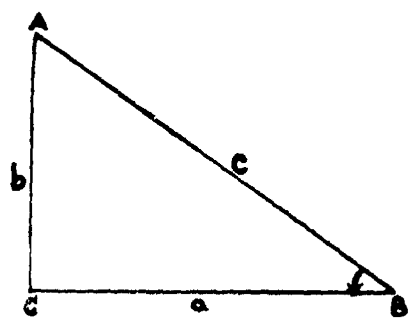
$$\therefore A = 36^\circ 54' \text{ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

$$\therefore C = 90^\circ - A$$

$$= 90^\circ - 36^\circ 54'$$

$$= 53^\circ 46'$$

ಆ) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು:



ಚಿತ್ರ 21

ABC ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ∟C = 90°. ಒಂದು ಬಾಹು AB = b ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ A ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.

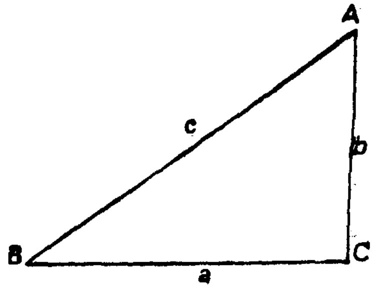
$$\therefore B = 90^\circ - A$$

$$\therefore \operatorname{cosec} B = \frac{c}{b}, \cot B = \frac{a}{b}$$

B, a ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ:

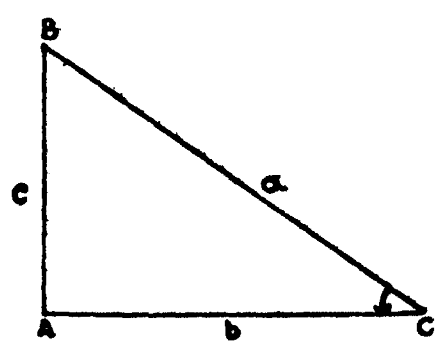
1) $C = 90°$, $B = 60°$, $b=5$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 22

$$A = 90° - B = 90° - 60°$$
$$= 30°$$
$$\tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{a}{5}$$
$$\therefore\ a = 5\tan 30° = \frac{5}{\sqrt{3}}$$
$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{5/\sqrt{3}}{c}$$
$$\therefore\ C = \frac{5}{\sqrt{3}\sin 30°} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

2) $A=90°$, $C=28°35'$, $a=25$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 23

$$B=A-C$$
$$=90°-28-35'$$
$$=61°25'$$

$$\sin C=\frac{c}{a}$$

$$\therefore c=a\sin C=25\times0.4475$$
$$=11.1875$$
$$=11.18$$

ಮತ್ತು $\cos C=\frac{b}{a}$

$$\therefore b=a\cos C=25\times0.8781$$
$$=21.95$$

ಅಭ್ಯಾಸ 6

(ನಕ್ಷತ್ರ ಗುರುತಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.)
ಕೆಳಗಿನ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1) $B=90°, a=1, c=1$
2) $A=90°, a=2, b=\sqrt{3}$
3) $b=4\sqrt{3}, C=90°, a=4$
4) $a=2\sqrt{3}, c=2, B=90°$
5) $B=90°, C=30°, a=20$
6) $c=2, C=30°, A=90°$
7) $A=60°, B=90°, b=6$
8) $a=\sqrt{3}, b=2, B=90°$
9) $C=90°, a=9\sqrt{3}, A=30°$
*10) $a=4, B=25°, A=90°$
11) $a=2, B=C=45°$
12) $B=90°, A=60°, b=4$
*13) $A=90°, b=225, c=272$
14) $B=90°, a=c=5$
*15) $a=15, b=25, B=90°$
*16) $A=36°37', B=90° a=6$
*17) $B=55°43', C=90°, b=5$
*11) $C=69°26', A=90° c=7$
*19) $A=90°, B=39°24', b=25$
*20) $a=100, B=90°, C=49°48'$

6.2 : ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರ:

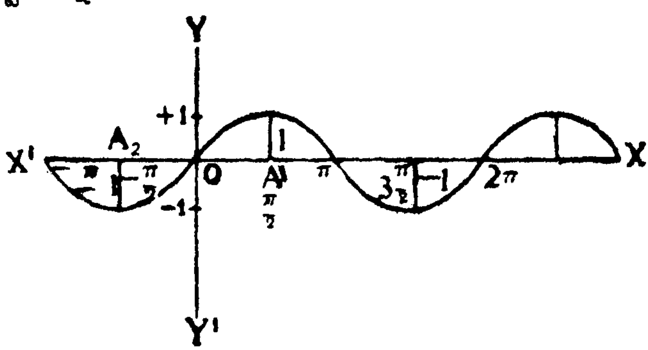
ಈಗ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ $y=\sin x$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. xನ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಯಿಸಿದಂತೆಲ್ಲ $\sin x$ ಬೆಲೆಯೂ ಸಹ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ y ಬೆಲೆಯೂ ಸಹ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅದ್ದರಿಂದ $y=\sin x$ ಫಲನವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಫಲನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆಯೇ $y=\cos x$, $y=\tan x$.... ಇತ್ಯಾದಿಗಳೂ ಸಹ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಲಫನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

6.3 : $y=\sin x$ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರ

X'OX ಮತ್ತು Y'OY ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ, O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ X ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಗಳು.

xಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಸಂಬಂಧಿಸಿದ y ಬೆಲೆಗಳುಳ್ಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 24

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{-\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{2}$	-2π
y ಅಥವಾ sin x	0	1	0	−1	0	−1	0	+1	0

X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA = \frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರಲಿ. Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB_1 = 1$ ಆಗಿರಲಿ.

X′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA_2 = -\frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರಲಿ Y′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB_2 = 1$ ಆಗಿರಲಿ.

Xನ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(0, 2\pi)$ ವಿರಾಮ (Interval) ಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ನಂತರ, ಹೀಗೆಯೇ X′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(0_1, -2\pi)$ ವಿರಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಆನಂತರ ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ $y = \sin x$ ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

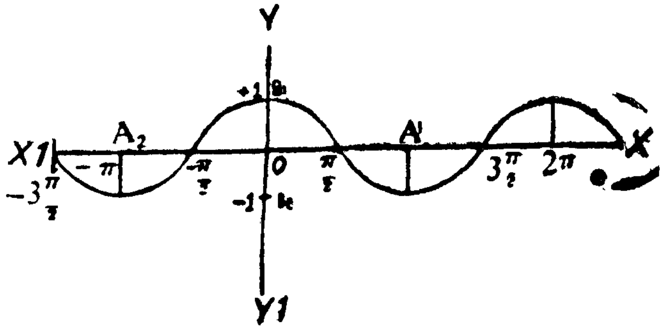
ಆದುದರಿಂದ $\sin x$ನ ಬೆಲೆಯು -1 ಮತ್ತು $+1$ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು. $(0, \pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ $\sin x$ ನ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ 1ಕ್ಕೆ ಏರಿ, $(\pi/2, \pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ನಂತರ $(\pi, 3\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ -1ಕ್ಕೆ ಇಳಿದು $(3\pi/2, 2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ -1 ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಏರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $(0, -\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ $\sin x$ ನ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ -1ಕ್ಕೆ ಇಳಿದು, $(-\pi/2, -\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ -1 ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಏರುತ್ತದೆ. ನಂತರ $(-\pi, -3\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ 1ಕ್ಕೆ ಏರಿ, $(-3\pi/2, -2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

6.22: $y = \cos x$ ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ:

XOX^1 ಮತ್ತು YOY^1 ಅಕ್ಷಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. xಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋಷ್ಟಕವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{-\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{2}$	-2π
y	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA_1 \pi =$ ಆಗಿರಲಿ. X′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA_2 = -\pi$ ಆಗಿರಲಿ. Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB_1 = 1$, ಮತ್ತು Y′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB_2 = 1$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 25

X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(0, 2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಧಿಸಿದ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆಯೇ X′ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ$(೦, -2\pi)$ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಧಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ $y = \cos x$ ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\cos x$ ನ ಬೆಲೆಯು -1 ಮತ್ತು 1ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದು. ಅದು −1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು +1ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿಯೂ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. $(0, \pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ $\cos x$ ಬೆಲೆಯು 1ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಇಳಿದು $(\pi/2, \pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ—1ಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. $(\pi, 3\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ—1ರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಏರಿ,$(3\pi/2, 2\pi)$ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ1ಕ್ಕೆಏರುತ್ತದೆ

ಹೀಗೆಯೇ $(0, -2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ $\cos x$ ಬೆಲೆಯು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ.

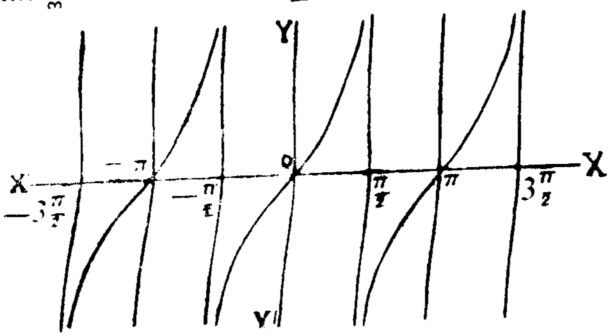
6.23; **y=tan x ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ**:

$x = o$ ಆಗಿದ್ದಾಗ,$\tan x = \tan 0 = 0$. ಅಂದರೆ $y = 0$. $x = 45^\circ = \pi/4$ ಆದಾಗ $y = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ x ಬೆಲೆಯು ಜಾಸ್ತಿಯಾದಂತೆಲ್ಲ y ನ

ಬೆಲೆಯೂ ಸಹ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. $x=90^0=\pi/2$ ಆದಾಗ $y=\tan 90^0=\infty$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(0,\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ tan x ಬೆಲೆಯ 0 ಯಿಂದ ∞ ರವರೆಗ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

x ಋಣ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆ $y=\tan(-x)=-\tan x$ ಬೆಲೆಯು ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. $x=-\pi/2$ ಆದಾಗ $y=-\infty$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದು $(-\pi/2, 0)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ tanx ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ $-\infty$ ಗೆ ಇಳಿಯುತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $y=\tan x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $(0,\pi 2)$ ಮತ್ತು $(-\pi/2,0)$ ವಿರಾಮುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 26

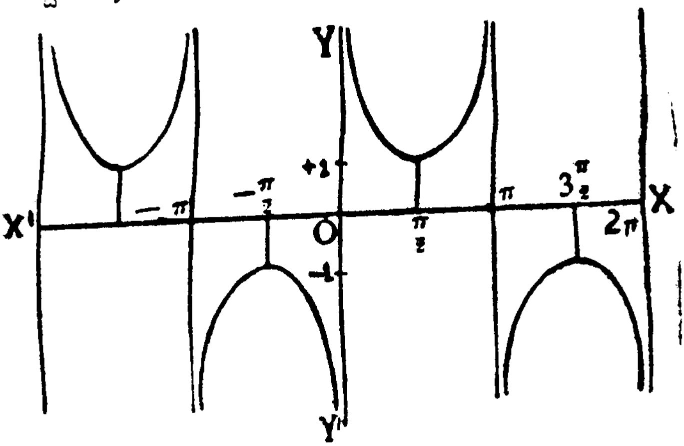
6.24: y=cosec x ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ:

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ಆದುದರಿಂದ $y=\operatorname{cosec} x$ ಫಲನದ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವೂ ಮತ್ತು $y=\frac{1}{\sin x}$ ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

x ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ $\pi/2$ ವರೆಗ ಏರಿದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು ∞ ಇಂದ 1ಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯು $\pi/2$ ಇಂದ π ವರೆಗೆ ಏರಿದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯು π ಇಂದ $3\pi/2$ ವರೆಗೆ ಏರಿದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಇಂದ -1ಕ್ಕೆ ಏರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ x ಬೆಲೆಯು $3\pi/2$ ಇಂದ 2π ವರೆಗೆ ಏರಿದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು -1ರಿಂದ $-\infty$ ವರೆಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(2\pi + x)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(0, 2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೋ ಅದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು $(2\pi, 4\pi)$ ನಲ್ಲಿದ್ದಾಗಲೂ ಸಹ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $y = \operatorname{cosec} x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.



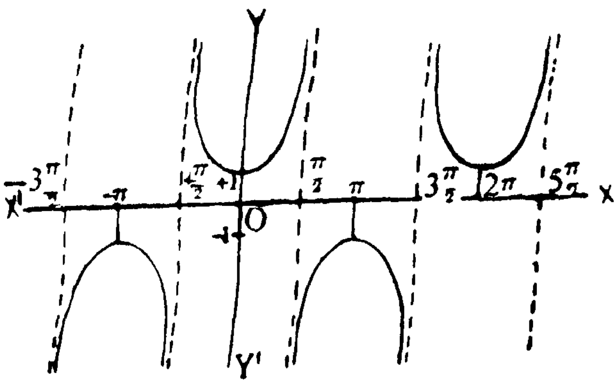
ಚಿತ್ರ 27

ಇದೇ ರೀತಿ x ಗೆ ಋಣಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ $y = \operatorname{cosec} x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

6.25: $y = \sec x$ ನ **ರೇಖಾಚಿತ್ರ** :

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ಆದುದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ $\pi/2$ ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ $y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯು $\pi/2$ ಇಂದ π ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಇಂದ -1 ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $(\pi, 3\pi/2)$ರ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ y ಬೆಲೆಯು -1 ರಿಂದ $-\infty$ ವರೆಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ನಂತ $(3\pi/2, 2\pi)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ∞ ಇಂದ 1ಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ x ಬೆಲೆಯು 2π ಇಂದ $5\pi/2$ ವರೆಗೆ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ y ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ

ಹೀಗೆಯೇ x ಗೆ ಋಣ ಬೆಲೆ ಕೊಡುವುದರಿಂದ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $y = \sec x$ ದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

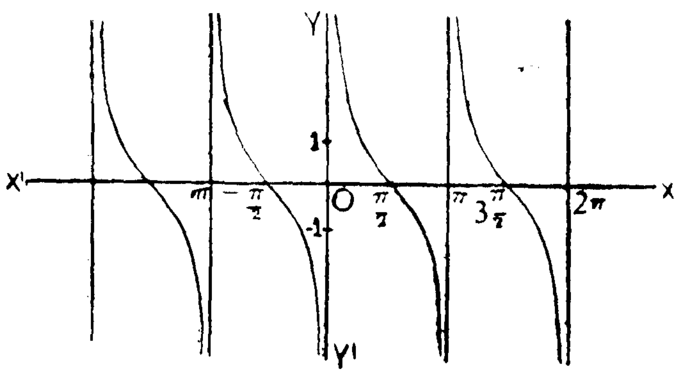


ಚಿತ್ರ 28

6.26: $y = \cot x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರ :

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $y = \frac{1}{\tan x}$ ಮತ್ತು $y = \cot x$ ಎರಡು ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

x ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ $\pi/4$ ವರೆಗೆ ಏರುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು ∞



ಚಿತ್ರ 29

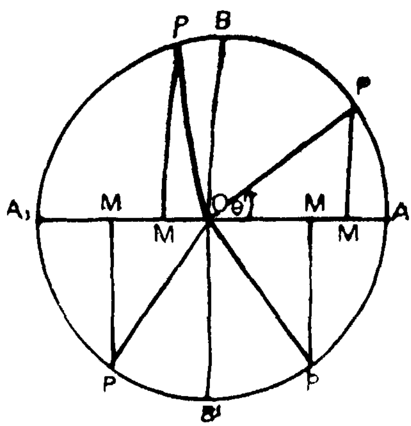
ಂದ 1ಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯು $\pi/4$ ಇಂದ $\pi/2$ಗೆ ಹೋದಂತೆ yಬೆಲೆಯು ರಿಂದ 0ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯು $\pi/2$ ಇಂದ πಗೆ ಹೋದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು ಇಂದ $-\infty$ ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ x ಬೆಲೆಯು $(\pi, 3\pi/2)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿ ದ್ದಾಗ yಬೆಲೆಯು ∞ ಇಂದ 0ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ಬೆಲೆಯು $(3\pi/2, 2\pi)$ ರಾಮದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ y ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಇಂದ 0ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ x ಬೆಲೆಯ $(\frac{-\pi}{2}, 0)$ ವಿರಾಮದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ y ಬೆಲೆಯು ∞ ಇಂದ 0ಗೆ ಏರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $(-\pi, -\pi/2)$ವಿರಾಮದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ 0 ಇಂದ ∞ ಗೆ ರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $y = \cot x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಹಿಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿಯ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

7.1 :



ಚಿತ್ರ 30

OP ದಿಕ್‌ಪರಿಮಾಣ ತ್ರಿಜ್ಯವು ∠AOP ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿ ನಂತರ OP ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸಲಿ. ಈ ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣವು θ ಆಗಿರಲಿ ನಂತರ P ಇಂದ OA ಗೆ, PM ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. OP ರೇಖೆಯು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದಾಗ MP ಲಂಬರೇಖೆಯು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. OM ರೇಖೆಯು OA ಅಥವಾ OA′ ಮೇಲೆ OP ರೇಖೆಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಗ $\sin\theta = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{\text{ಲಂಬರೇಖೆ}}{\text{ದಿಕ್‌ಪರಿಮಾಣ ತ್ರಿಜ್ಯ}}$

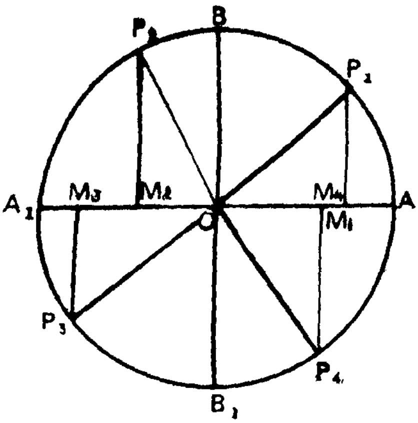
$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ಪ್ರಕ್ಷೇಪ}}{\text{ದಿಕ್‌ಪರಿಮಾಣ ತ್ರಿಜ್ಯ}}$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{M} = \frac{\text{ಲಂಬರೇಖೆ}}{\text{ಪ್ರಕ್ಷೇಪ}}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ವಿ. ಸೂ.: ದಿಕ್‌ಪರಿಮಾಣ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಚಿಹ್ನೆ ಉಳ್ಳದ್ದಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

7.12 :



ಚಿತ್ರ 31

1) ಕೋನವು (θ) ಮೊದಲನೆ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ [$\angle AOP_1$ ಕೋನ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ], ಆಗ ಲಂಬ ಮತ್ತು ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಎರಡೂ ಧನಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ದಿಕ್‌ಪರಿಮಾಣ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle AOP_1$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಸಹ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ.

2) ಕೋನದ ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ($\angle AOP_2$ ಕೋನ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ) ಪ್ರಕ್ಷೇಪವು ಋಣಚಿಹ್ನೆ ಉಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ, ಕೋಸೀಕೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಸೈನ್‌ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. AOP_2 ಕೋನದ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3) ಕೋನವು ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ($\angle AOP_3$, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ) ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯೂ ಸಹ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ, ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೋಸೀಕೆಂಟ್

ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಕೋಸೈನ್ ಮತ್ತು ಸೀಕೆಂಟ್‌ಗಳೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4) ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ಕೋನವು ನಾಲ್ಕನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿದ್ದರೆ [$\angle AOP_4$, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ] ಪ್ರಕ್ಷೇಪವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಲಂಬರೇಖೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ, ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೋಸೀಕೆಂಟ್‌ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಕೋಸೈನ್ ಮತ್ತು ಸೀಕೆಂಟ್‌ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುವು ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್‌ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ತೀರ್ಮಾನಗಳಿಗೆ ಬರಬಹುದು:

1. ಒಂದನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

2. ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೋಸಿಕೆಂಟ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3. ಮೂರನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು

4. ನಾಲ್ಕನೇ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಕೋಸೈನ್ ಮತ್ತು ಸೀಕೆಂಟ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

7.2: ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳು :

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಸರಳಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋನಗಳದ್ದು 'ಸರಳ ಪೂರಕಕೋನಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ: 102° ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕವೇನು ?

$$180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$$

$\therefore$ 78° ಕೋನವು 102° ಕೋನದ ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

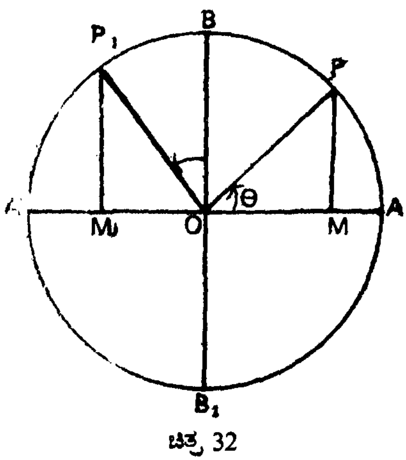
ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಅ)

ಅ) ಈ ಕೆಳಕಂಡವುಗಳ ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) 135°	6) 170°
2) $105^\circ\, 38'$	7) $59'59''$
3) $79^\circ\, 48'35''$	8) 145.5°
4) 150°	9) 122.25°
5) $98^\circ\, 49'\, 35''$	10) 110.75°

7.3 : ದತ್ತಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ದತ್ತ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಧಿಸಿದ $(\pi/2+\theta)$, $(\pi+\theta)$, $(\pi-\theta)$, $(-\theta)$, $(360^\circ-\theta)$ ಅಥವಾ $(2\pi-\theta)$ ಮುಂತಾದ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅ) $(\frac{\pi}{2}+\theta)$ ಅಥವಾ $(90^\circ+\theta)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :



ಚಿತ್ರ 32

$\angle AOP$ ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣ θ ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ OP ರೇಖೆಯ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OB ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಲಿ. ನಂತರ θ ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle AOP' = 90^\circ + \theta = (\pi/2 + \theta)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಂತರ PM ಮತ್ತು P′M′ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ OA ಮತ್ತು OA′ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ $\triangle OPM$ ಮತ್ತು $\triangle P'OM'$ ಗಳು ಸರ್ವವಿಧದಲ್ಲೂ ಸಮನಾಗಿವೆ

$$\therefore OM' = MP, \quad M'P' = OM$$

ಹಾಗೂ M′ ಮತ್ತು MP ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಮತ್ತು M′P′ ಮತ್ತು OM ಗಳು ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆ ಉಳ್ಳವುಗಳಾಗಿವೆ.

$$\therefore OM' = -MP, \quad OM = M'P'$$

$$\therefore \sin(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{-MP} = -\cot\theta$$

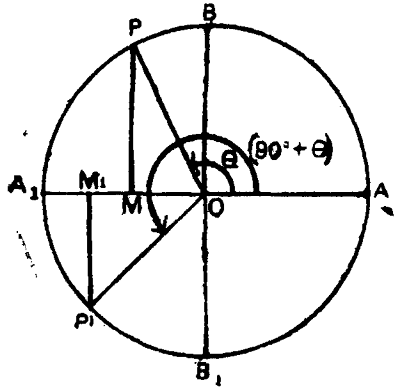
ಹಾಗೂ, $\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \dfrac{1}{\sin(90^\circ + \theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

$$\sec(90^\circ + \theta) = \frac{1}{\cos(90^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\operatorname{cosec}\theta$$

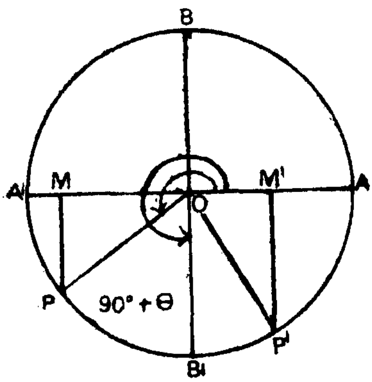
ಮತ್ತು $\cot(90^\circ + \theta) = \dfrac{1}{\tan(90^\circ + \theta)} = \dfrac{1}{-\cot\theta} = -\tan\theta$

ಕೊನೆಯ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

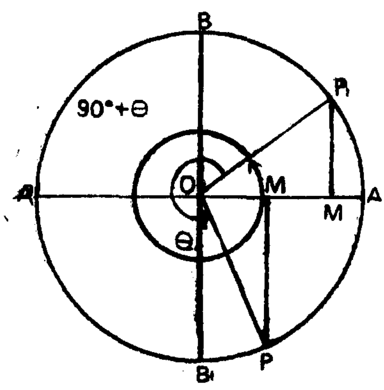
ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಕೋನದ ಅಂದರೆ θ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸ ಬಹುದು



ಚಿತ್ರ 33 (i)

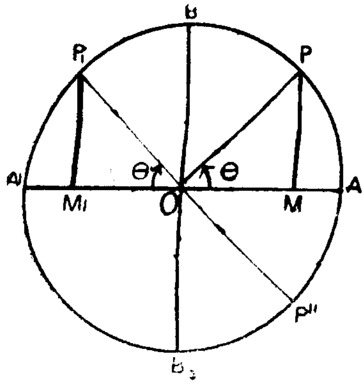


ಚಿತ್ರ 33 (ii)



ಚಿತ್ರ 33 (iii)

ಆ) $(\pi - \theta)$ **ಅಥವಾ** $(180^\circ - \theta)$ **ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:**



ಚಿತ್ರ 34

$\angle OAP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ OP ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OA′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ 180°ಗೆ ಸಮನಾದ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈಗ OP ರೇಖೆಯು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ θ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle AOP' = 180^\circ - \theta = \pi - \theta$

P ಮತ್ತು P′ಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ PM ಮತ್ತು P′M′ಗಳನ್ನು AOA′ಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ $\triangle OPM \cong \triangle O'P'M'$

$\therefore MP = M'P', \ OM = OM'$

ಆದರೆ $OM = OM'$

$$\therefore \sin(\pi - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{MP}{-OM}=-\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(\pi-\theta)=\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(\pi-\theta)=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\cot(\pi-\theta)=\frac{1}{\tan(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\cot\theta$$

ಈಗ OP ರೇಖೆಯು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ, $\angle AOP''=(2\pi-\theta)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ $OP'=OP''$

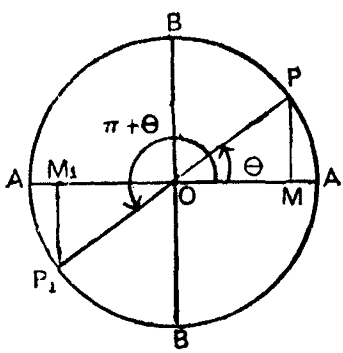
$\therefore \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta,\ \sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore \cos(n\pi-\theta)=\begin{cases}\cos\theta \rightarrow (\text{n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\\ -\cos\theta \rightarrow (\text{n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\end{cases}$

ಹೀಗೆಯೇ $\sin(n\pi-\theta)=\begin{cases}\sin\theta \rightarrow (\text{n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\\ -\sin\theta \rightarrow (\text{n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\end{cases}$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

) $(\pi+\theta)$ ಅಥವಾ $(180^0+\theta)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:



ಚಿತ್ರ 35

$\angle AOP=\theta$ ಆಗಿರಲಿ. OP ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OA′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ 180° ಕೋನ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ θ ಕೋನವನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯುಲ್ಲಿಯೇ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\angle AOP'=(180^\circ+\theta)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

P ಮತ್ತು P′ ಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ PM ಮತ್ತು P′M′ ಲಂಬಗಳನ್ನು AOA′ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ $\triangle OPM$ ಮತ್ತು OP′M′ ಗಳು ಸರ್ವಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore OM=OM'$$
$$PM=P'M'$$

ಆದರೆ $OM=-OM'$ ಮತ್ತು $PM=-P'M'$

$$\therefore \sin(180+\theta)=\frac{M'P'}{OP'}=-\frac{MP}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{\cdot MP}{\cdot OM}=\tan\theta$$

ಹಾಗೂ $\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=-\frac{1}{\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}=-\sec\theta$$

ಮತ್ತು $\cot(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\tan(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$

ಈಗ OP′ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪುನಃ 180° ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದರೆ ಅದು OP ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಆಗ OA ರೇಖೆಯು $(2\pi+\theta)$ ಅಂದರೆ $(360^0+\theta)$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ θ ಮತ್ತು $(2\pi+\theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$$
$$\operatorname{cosec}(2n\pi\ \theta)=\operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$$
$$\cot(2n\pi+\theta)=\cot\theta$$

ಈ OA ರೇಖೆಯು $(3\pi+\theta)$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, OA ರೇಖೆಯು OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

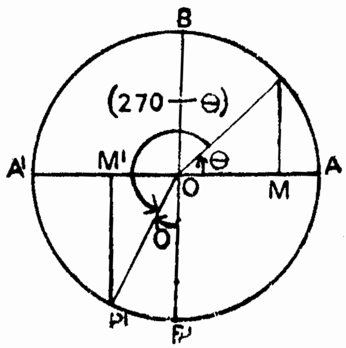
ಆದುದರಿಂದ $(3\pi+\theta)$ ಮತ್ತು $(\pi+\theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \sin(3\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(3\pi+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$$\therefore \sin(n\pi+\theta)=\begin{cases}\sin\theta \rightarrow (\text{n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ}) \\ -\sin\theta \rightarrow (\text{n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\end{cases}$$

$$\cos(n\pi+\theta)=\begin{cases}\cos\theta \rightarrow (\text{n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ}) \\ -\cos\quad (\text{n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ})\end{cases}$$

ಈ) $(270°-\theta)$ ಅಥವಾ $(3\pi/2-\theta)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:



ಚಿತ್ರ 36

$\angle AOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. OP ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ OA ರೇಖೆಯಿಂದ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OB′ ರೇಖೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ 270° ಕೋನವುಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ನಂತರ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ θ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ $(270°-\theta)$ ಕೋನವುಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

PM ಮತ್ತು $P'M'$ ಗಳನ್ನು AOA'ಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ $\triangle OMP$ ಮತ್ತು $\triangle P'M'O$ ಗಳು ಸರ್ವಸಮನಾಗಿವೆ.

$\therefore MP = OM'$, ಮತ್ತು $OM = M'P'$

ಆದರೆ $OM = -MP$, $M'P' = -OM$ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ)

$$\therefore \sin(270°-\theta) = \frac{M'P'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\cos(270°-\theta) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(270°-\theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-OM}{-MP} = \cot\theta$$

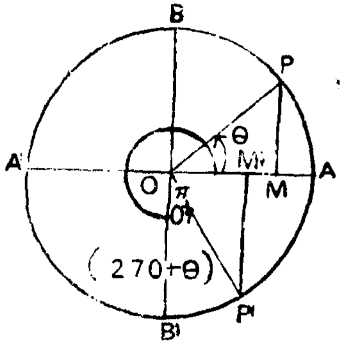
ಹಾಗೂ $$\operatorname{cosec}(270°-\theta) = \frac{1}{\sin(270°-\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta} = -\sec\theta$$

$$\sec(270°-\theta) = \frac{1}{\cos(270°-\theta)} = -\frac{1}{\sin\theta} = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\cot(270°-\theta) = \frac{1}{\tan(270°-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

ಉ) $(270°+\theta)$ ಅಥವಾ $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

$\angle AOP = \theta$. ಆಗಿರಲಿ OP ರೇಖೆಯು OA ರೇಖೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OP′ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದಾಗ



ಚಿತ್ರ 37

$\angle AOP = (270+\theta)$ ಆಗುತ್ತದೆ. PM ಮತ್ತು P'M' ಗಳನ್ನು OA ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ

$\triangle OPM$ ಮತ್ತು $\triangle P'OM'$ ಗಳು ಸರ್ವಸಮನಾಗಿವೆ.

$$\therefore OM' = MP, \; M'P' = OM$$

ಆದರೆ $OM' = +MP$, ಮತ್ತು $M'P' = -OM$

$$\therefore \sin(270^\circ+\theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\cos(270^\circ+\theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

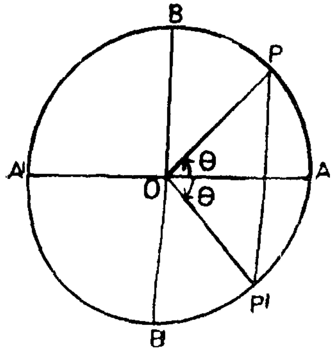
$$\tan(270^\circ+\theta) = \frac{M'P'}{OM'} = -\frac{OM}{MP} = -\cot\theta$$

ಹಾಗೂ $\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta) = \frac{1}{\sin(270^\circ+\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta} = -\sec\theta$

$$\sec(270^\circ+\theta) = \frac{1}{\cos(270^\circ+\theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\cot(270^\circ+\theta) = \frac{1}{\tan(270^\circ+\theta)} = -\frac{1}{\cot\theta}$$

ಊ) $(360^\circ - \theta)$ **ಅಥವಾ** $(-\theta)$ **ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :**



ಚಿತ್ರ 38

$\angle AOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

OP ರೇಖೆಯು OA ಇಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OP′ ರೇಖೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ $-\theta$ ಅಥವಾ $360^\circ - \theta$ ಕೋನವುಂಟಾಗುತ್ತದೆ. $\angle AOP' = -\theta = 360^\circ - \theta$. P ಮತ್ತು P′ ಸೇರಿಸಿ. PP′, OA ರೇಖೆಯನ್ನು Mನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$\triangle$ POM ಮತ್ತು $\triangle$ P′OM ಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

$OM \perp PP'$ ಮತ್ತು $PM = P'M$

ಆದರೆ $+PM = -P'M$

$$\therefore \sin(360-\theta) = \sin(-\theta) = \frac{P'M}{OP} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MP'}{OM} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಅ)

ಅ] ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

1) $\cot(180^\circ+A)\cos(90^\circ+A)\operatorname{cosec}(90^\circ-A)$

2) $\cot(90^\circ-A)-\tan(270^\circ+A)-\tan(90^\circ+A)$

3) $\sin^2(270^\circ-A)+\cos^2(90^\circ+A)+\cot(180^\circ+A)\times\tan(90^\circ-A))$

4) $\sin\theta-\cos(270^\circ+\theta)-\cos(270^\circ-\theta)+\sin(180^\circ+\theta)$

5) $\cos\alpha+\cos(180^\circ-\alpha)-\sin(90^\circ+\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha)$

ಆ) ಕೆಳಕಂಡವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1) $\sin(180^\circ-\theta)-\cos(270^\circ+\theta)+\sec(90^\circ+\theta)$
$=\cos(90^\circ-\theta)+\cos(90^\circ+\theta)-\sec(270^\circ+\theta)$.

2) $\cos(180^\circ+A)+\sin(180^\circ+A)+\sin(270^\circ+A)$
$=\sin(270^\circ-A)+\cos(180^\circ-A)+\sin(360^\circ-A)$

3) $\tan(180^\circ-\theta)+\cot(180^\circ-\theta)+\tan(360^\circ+\theta)$
$=\tan(270^\circ-\theta)-\cot(90^\circ-\theta)+\tan(90^\circ+\theta)$

4) $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}+\dfrac{\tan(90^\circ+A)}{\cot(180^\circ+A)}+\dfrac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$
$=1$.

5) $\dfrac{\sin(180^\circ-B)}{\tan(180^\circ+B)}\cdot\dfrac{\cot(90^\circ-B)}{\tan(90^\circ+B)}\cdot\dfrac{\cos(360^\circ-B)}{\sin(-B)}$
$=\sin B$.

6) $\dfrac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} \cdot \dfrac{\tan(90^\circ - \alpha)}{\cot(90^\circ + \alpha)} \cdot \dfrac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$

$= \cos \alpha$

7) $\tan\beta + \tan(180^\circ - \beta) - \tan(360^\circ - \beta)$

$= \tan(270^\circ - \beta)$

8) $\sin(\pi/2 + \theta) \cdot \cos(\pi - \theta) \cdot \cot(3\pi/2 + \theta)$

$= \sin(\pi/2 - \theta) \cdot (-\cos\theta) \cdot \cot(\pi/2 + \theta)$

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

8.1: ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳು:

ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು 'ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

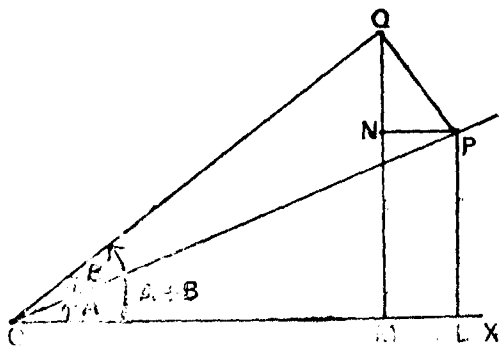
ಉದಾ: A, B, C, ... ಕೋನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ (A+B), (A+B+C), (A—B), (A—B—C), ... ಮುಂತಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

8.2: A ಮತ್ತು B ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ,

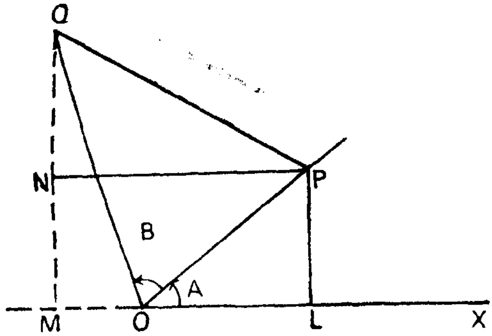
$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \rightarrow (1)$

ಮತ್ತು $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \rightarrow (2)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ:



ಚಿತ್ರ 39 (i)



ಚಿತ್ರ 39(ii)

$\angle XOP = A$, $\angle POQ = B$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $\angle XOQ = \angle XOP + \angle POQ$

$= (A+B)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ $(A+B)$ ಲಘುಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ $(A+B)$ ಅಧಿಕಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

OP ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ,ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PL ಲಂ ...ನ್ನು OXಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ನಂತರ OQ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂ ( ) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ QM ಲಂಬವನ್ನು OXಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂ PN ಲಂಬವನ್ನು QMಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

QOMP ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

$\because$ $\angle QMO = \angle QPO = 90^\circ$ ಆದ್ದರಿಂದ Q,O,M ಮತ್ತು ...ಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ QOM ...ಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ (i) ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle MQP = \angle POM = A$

(ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗ

(ii) ನೇ ಚಿತ್ರ ದಲ್ಲಿ $\angle MQP = 180^\circ - \angle MOP$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $\angle MQP = \angle NQP = A$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin(A+B)=\sin\angle QOM$

$$=\frac{QM}{OQ}=\frac{QN+NM}{OQ}$$

$$=\frac{QN+PL}{OQ} \quad [\because NM=PL]$$

$$=\frac{QN}{OQ}+\frac{PL}{OQ}$$

$$=\frac{PL}{OQ}+\frac{QN}{OQ}=\frac{PL}{OP}\cdot\frac{OP}{OQ}+\frac{QN}{PQ}\cdot\frac{PO}{OQ}$$

$$=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B.$$

[$\triangle POL$ ನಲ್ಲಿ, $\frac{PL}{OP}=\sin\angle POL=\sin A$,

$\triangle OPQ$ ನಲ್ಲಿ, $\frac{OP}{OQ}=\cos\angle POQ=\cos B$.

$\frac{PQ}{OQ}=\sin\angle POQ=\sin B$ ಮತ್ತು

$\triangle QNP$ ದಲ್ಲಿ $\frac{QN}{PQ}=\cos\angle PQN=\cos A$]

$$\therefore \boxed{\sin(A+B)=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B} \rightarrow (1)$$

$$\cos(A+B)=\cos(\angle MOQ)=\frac{OM}{OQ}=\frac{OL-LM}{OQ}$$

$$=\frac{OL-PN}{OQ} \quad (\because LM=PN)$$

$$=\frac{OL}{OQ}-\frac{PN}{OQ}$$

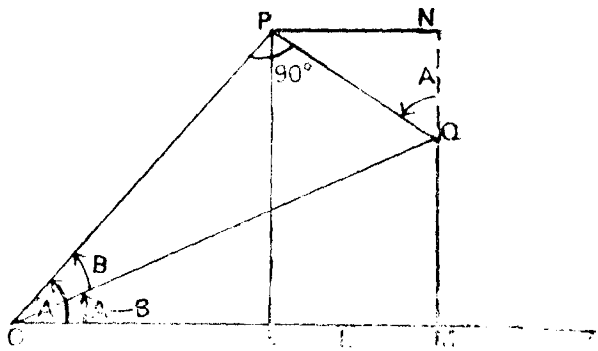
$$=\frac{OL}{OP}\cdot\frac{OP}{OQ}-\frac{PN}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OQ}$$

(POL, OPQ, PQN ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ)

$= \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$

$$\therefore \boxed{\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B} \rightarrow (2)$$

8.3 : **A ಮತ್ತು B ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು A > B** ಆದಾಗ $\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B \rightarrow (1)$. ಮತ್ತು $\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A . \sin B \rightarrow (2)$ **ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ:**



ಚಿತ್ರ 40

$\angle XOP = A$, ಮತ್ತು $\angle POQ = B$ ಆಗಿರಲಿ $(A > B)$

$\therefore \angle XOQ = A - B$.

P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿಂದ, PL ಮತ್ತು OMಗಳನ್ನು OXಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. Q ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OPಗೆ QP ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, PN ಲಂಬವು MQ ರೇಖೆಯನ್ನು Nನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

$$\therefore \sin(A-B) = \frac{QM}{OQ} = \frac{MN-QN}{OQ} = \frac{PL-QN}{OQ}$$

$$= \frac{PL}{OQ} - \frac{QN}{OQ}$$

$$= \frac{PL}{OQ} \cdot \frac{OP}{OQ} - \frac{QN}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OQ}$$

$$= \sin A \cdot \cos B - \cos A \sin B$$

$$\boxed{\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B} \rightarrow (1)$$

$$\cos(A-B) = \frac{OM}{OQ} = \frac{OL+LM}{OQ} = \frac{OL+PN}{OQ}$$

$$= \frac{OL}{OQ} + \frac{PN}{OQ}$$

$$= \frac{OL}{OP} \cdot \frac{OP}{OQ} + \frac{PN}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OQ}$$

$$= \cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B$$

$$\therefore \boxed{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B} \rightarrow (2)$$

ಗ $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$ ($\cos A \cos B$ ಇಂದ ಅಂ

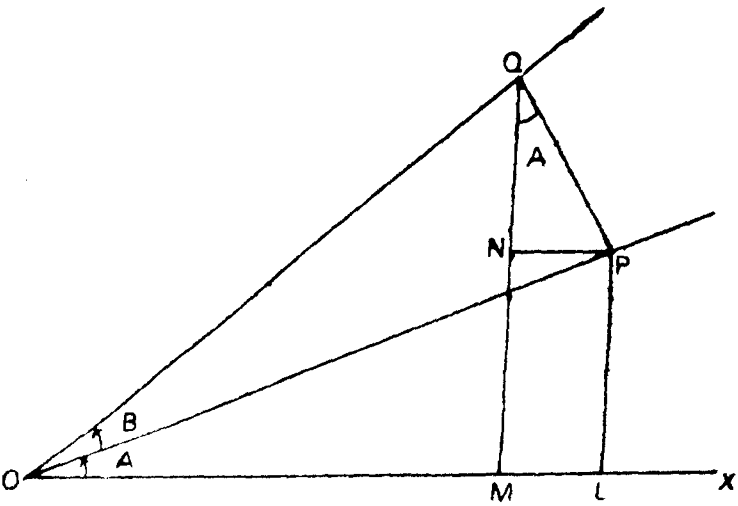
ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$\therefore \boxed{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \rightarrow (3)$$

ಹೀಗೆಯೇ $\boxed{\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}} \rightarrow (4)$

ಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

8.4: ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ tan (A±B) ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ:



ಚಿತ್ರ 41

$\angle XOP = A$ ಮತ್ತು $\angle POQ = B$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $\angle XOQ = A + B$ ಆಗುತ್ತದೆ.

P ಮತ್ತು Q ಗಳಿಂದ, PL ಮತ್ತು QM ಗಳನ್ನು OXಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಹಾಗೂ P ಇಂದ PN ಲಂಬವನ್ನು QMಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಚತುರ್ಭುಜ OMPQ ನಲ್ಲಿ $\angle QMO = \angle QPO = 90°$

$\therefore \angle POL = \angle PQM = A$

$\therefore \triangle NQP$ ಮತ್ತು $\triangle LOP$ ಸರ್ವಸಮನಾಗಿವೆ.

$$\therefore \frac{NQ}{LO} = \frac{PQ}{PO} = \frac{PN}{LP}$$

$\frac{PQ}{PO} = \tan B, \therefore \frac{NQ}{OL} = \tan B$ (ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ)

ಹಾಗೂ $\frac{PN}{NO} = \tan A$

$$\therefore \tan A \cdot \tan B = \frac{PN}{NQ} \cdot \frac{NQ}{OL} = \frac{PN}{OL}$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{MQ}{OM} = \frac{MN+NQ}{OL-LM}$$

$$= \frac{\frac{MN}{OL} + \frac{NQ}{OL}}{1 - \frac{LM}{OL}} \quad (\because LM = PN$$

i.e. $$\tan(A+B) = \frac{MN/OL + NQ/OL}{1 - PN/OL}$$

$$= \frac{\frac{PL}{OL} + \frac{NQ}{OL}}{1 - \frac{PN}{OL}} \quad (\because MN = PL)$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\therefore \boxed{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \rightarrow (3)$$

ಹೀಗೆಯೇ $A > B$ ಆಗಿದ್ದಾಗ,

$$\boxed{\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}} \rightarrow (4)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

8.5. (A+B + C) ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ:

ಅ) $\sin(A+B+C) = \sin[(A+B)+C]$

$= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C$

$$=[\sin A\cos B+\cos A\sin B]\cos C+[\cos A\cos B-\sin A\sin B]\sin C$$

$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C[\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C]$$ [cosA cosB cosC ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$\therefore \sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C[\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C]$$

ಆ) $\cos(A+B+C)=\cos[(A+B)+C]$

$$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C[1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C]$$

$$\therefore \cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C[1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A]$$

ಇ) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C[\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C]}{\cos A\cos B\cos C[1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A]}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

$$\therefore \tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

$A+B+C=0$ ಆದರೆ,

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

$A+B+C=90°$ ಆದರೆ,

$\tan(A+B+C) = \infty$

$\therefore 1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A = 0$

ಅಥವಾ $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

ಾ : 1) sin15° ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

2) sin75° ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°)$$

$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

3) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

L.H.S. $=\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=[\cos A\cos B-\sin A\sin B][\cos A\cos B+\sin A\sin B]$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A[1-\sin^2 B]-[1-\cos^2 A]\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\cos^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\cos^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B=$ R.H.S.

ಹೀಗೆಯೇ $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)=\cos^2 B-\sin^2 A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8 (ಅ)

ಅ) ಕೆಳಕಂಡವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1) $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\cos^2 A$

2) $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

3) $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 B-\sin^2 A$

5) $\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin(A+B)\sin(A-B)$
$=\cos 2B$

6) $\cos(A+B)\cos(A-B)-\sin(A+B)\sin(A-B)$
$=\cos 2A$

7) $\sin(A+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A+\cos A)$

8) $\tan(A+45^\circ)=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$

ಆ) ಕೆಳಕಂಡವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) $\sin 135^\circ$
2) $\cos 75^\circ$
3) $\tan 105^\circ$
4) $\tan 75^\circ$
5) $\sec 105^\circ$
6) $\cot 145^\circ$
7) $\operatorname{cosec} 150^\circ$
8) $\sin (3\pi/2+\pi/3)$
9) $\cos (\pi/2+\pi/6)$
10) $\tan(\pi/3+\tan\pi/6)$
11) $\operatorname{cosec}(\pi/2+\pi/3)$
12) $\sec(\pi/6+\pi/4)$

ಇ) $\sin A=3/5$, $\sin B=4/5$ ಆದಾಗ

(i) $\cos(A+B)$ (ii) $\cos(A-B)$ (iii) $\tan(A+B)$ ಮತ್ತು (iv) $\sin(A-B)$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ) $(A+B+C)=180^\circ$ ಆದಾಗ,

(i) $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A \tan B \tan C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) $$\cot (A+B+C) = \frac{\cot A \cot B \cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B \cot C+\cot C \cot A+\cot A \cot B-1}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8.6. 2 A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು, A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ:

1) $\sin (A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $B=A$ ಆದಾಗ,

$\sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$

i.e. $$\boxed{\sin 2A= 2 \sin A \cos A}$$

ಹಾಗೂ $$\sin 2A = 2\sin A \cos A=2\sin A \cos^2 A / \cos A$$
$$=2 \tan A / \sec^2 A$$
$$=\frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \boxed{\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}} \rightarrow (1)$$

2) ಹೀಗೆಯೇ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $B=A$ ಆದಾಗ

$\boxed{\cos 2A = (\cos^2 A - \sin^2 A)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$

ಹಾಗೂ $\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$$\cos 2A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

ಅಲ್ಲದೆ, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A\,(1 - \tan^2 A)$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \boxed{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}} \rightarrow (2)$$

3) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $B=A$ ಆದಾಗ,

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

ಅಥವಾ $\tan 2A = \dfrac{\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{2\sin A \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{\cos A\left(\cos A - \frac{\sin A}{\cos A}\sin A\right)}$$

$$= \frac{2\sin A}{\cos A - \tan A \sin A}$$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲ ಭಾಗವನ್ನು cosA ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\tan 2A = \frac{\frac{2\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}(\cos A - \tan A \sin A)}$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan A \cdot \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore \boxed{\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}} \rightarrow (3)$$

$$4)\ \cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

$$= \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ B=A ಆದಾಗ,

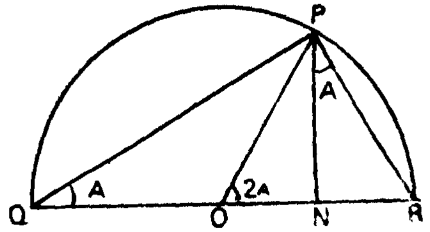
$$\cot 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{2\tan A} = \frac{1 - \frac{1}{\cot^2 A}}{2\,\frac{1}{\cot A}} = \frac{(\cot^2 A - 1)/\cot^2 A}{\frac{2}{\cot A}}$$

$$\text{i.e. } \cot 2A = \frac{(\cot^2 A - 1)\cot A}{2\cot^2 A} = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$$

$$\therefore \boxed{\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}}$$

$$\boxed{\therefore \cot 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{2\tan A} = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}} \rightarrow (4)$$

8.61 : ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಾನದಿಂದ 2A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ :



ಚಿತ್ರ 42

QPR ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ, QR ವ್ಯಾಸ, O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ, P ಯ ವೃತ್ತಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\angle PQR = A$ ಆಗಿರಲಿ . $PN \perp QR$

ಆಗ $\angle NPR = 90° - \angle QPN = \angle PQR = A$

ಮತ್ತು $\angle POR = 2\angle PQR = 2A$

$$\therefore \sin 2A = \frac{PN}{OP} = \frac{2PN}{2OP} = \frac{2PN}{QR} = \frac{2NP}{PQ} \cdot \frac{PQ}{QR}$$

$$= 2\sin A . \cos A$$

$$\therefore \boxed{\sin 2A = 2\sin A \cos A}$$

$$\cos 2A = \frac{ON}{OP} = \frac{2ON}{2OP} = \frac{2ON}{QR}$$

$$= \frac{QN - NR}{QR} = \frac{QN}{QR} - \frac{NR}{QR}$$

$$= \frac{QN}{PQ} \cdot \frac{PQ}{QR} - \frac{NR}{PR} \cdot \frac{PR}{QR}$$

$$= \cos A . \cos A - \sin A . \sin A$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A}$$

ಹಾಗೂ, $\tan 2A = \frac{PN}{ON} = \frac{2PN}{2ON} = \frac{2NP}{QN-NR}$

$$= \frac{2PN/QN}{1 - \frac{NR}{QN}}$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \frac{NR}{PN} \cdot \frac{PN}{QN}}$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}$$

8.7: **3A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ:**

1) $\sin(A+B+C) = \sin[(A+B)+C]$

$= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C.$

$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$

$B = C = A$ ಆದಾಗ,

$\sin 3A = \sin A \cos^2 A + \sin A \cos^2 A + \sin A \cos^2 A - \sin^3 A$

$= 3\cos^2 A \sin A - \sin^3 A$

$= 3\sin A(1 - \sin^2 A) - \sin^3 A$

$= 3\sin A - 3\sin^2 A - \sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore$ $\boxed{\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A}$ $\rightarrow$(1)

2) $\cos(A+B+C) = \cos[(A+B)+C]$

$= \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B) \sin C$

$= \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C - \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$

$B = C = A$ ಆದಾಗ,

$\cos 3A = \cos^3 A - \sin^2 A \cos A - \sin^2 A \cos A - \sin^2 A \cos A$

$= \cos^3 A - 3\sin^2 A \cos A$

$= \cos^3 A - 3\cos A\,(1 - \cos^2 A)$

$= \cos^3 A - 3\cos A + 3\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore$ $\boxed{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A}$ $\rightarrow$(2)

3) $\tan(A+B+C) = \tan[(A+B)+\ ]$

$$= \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B)\tan C}$$

$$= \frac{(\tan A + \tan B)/1 - \tan A \tan B + \tan C}{1 - [\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}] \tan C}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

ಈಗ $B=C=A$ ಆದರೆ,

$$\boxed{\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}} \rightarrow (3)$$

ಹೀಗೆಯೇ $$\boxed{\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}} \rightarrow (4)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

8 : A/2 ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

$A=\frac{A}{2}+\frac{A}{2}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sin A=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{A}{2}\right)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು :

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

i.e. $\sin A=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\boxed{\therefore \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

2) ಹೀಗೆಯೇ $\cos A=\cos^2 A/2-\sin^2 A/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಅಥವಾ $\cos A=1-\sin^2 A/2-\sin^2 A/2$

$=1-2\sin^2 A/2 \quad \rightarrow (a)$

ಅಥವಾ $\cos A=\cos^2 A/2-(1-\cos^2 A/2)$

$=\cos^2 A/2-1+\cos^2 A/2$

$=2\cos^2 A/2-1 \quad \rightarrow (b)$

$$\therefore \cos A = \cos^2 A/2 - \sin^2 A/2$$
$$= 2\cos^2 A/2 - 1 = 1 - 2\sin^2 A/2 \quad \rightarrow (2)$$

(a) ಮತ್ತು (b) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ,

$$\sin^2 A/2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos A)$$

ಮತ್ತು $\cos^2 A/2 = \tfrac{1}{2}(1 + \cos A)$

$$\therefore \frac{\sin^2 A/2}{\cos^2 A/2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

i.e. $\boxed{\tan^2 A/2 = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \rightarrow (c)$

3) $\tan A = \tan(A/2 + A/2) = \dfrac{\tan A/2 + \tan A/2}{1 - \tan^2 A/2}$

$$= \frac{2\tan A/2}{1 - \tan^2}$$

$$\therefore \boxed{\tan A = \frac{2\tan A/2}{1 - \tan^2 A/2}} \rightarrow (3)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) $\cos A = 1/3$ ಆದಾಗ $\cos 2A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$
$$= 2(1/3)^2 - 1$$
$$= 2/9 - 1 = -7/9.$$

2) $\tan a + \cot a = 2\operatorname{cosec} 2a$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\text{LHS} = \tan a + \cot a = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a}$$

$$=\frac{2}{2\sin a\cos a}=\frac{2}{\sin 2a}$$

$$=2\operatorname{cosec} 2a=\text{R.H.S.}$$

3) $\sin\alpha=1-2\sin^2(45^\circ-\alpha/2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ

$\text{R.H.S}=1-2\sin^2(45^\circ-\alpha 2)$

$=\cos[2(45^\circ-\alpha/2)] \quad \because(\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha)$

$=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$=\text{L.H.S.}$

4) $\tan A=3$ ಆದಾಗ $\tan 3A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$$=\frac{3\cdot 3-3^3}{1-3.3^2}=\frac{9-27}{1-27}=\frac{-18}{-26}=\frac{9}{13}$$

5) $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}$$

$$=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}-\frac{4\cos^3 A-3\cos A}{\cos A}$$

$$=\frac{\sin A(3-4\sin^2 A)}{\sin A}-\frac{\cos -A4(\cos^2 A3)}{\cos A}$$

$=3-4\sin^2 A-4\cos^2 A+3$

$=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=6-4$

$=2=\text{R.H.S}$

ಅಭ್ಯಾಸ 8 (ಅ)

1) $\sin A=1/2$ ಆದಾಗ, $\sin 2A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $\sin A=4/5$ ಆದಾಗ, $\cos 2A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $\cos A = 1/4$ ಆದಾಗ, $\cos 2A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4) $\sin B = 1/7$ ಆದಾಗ, $\cos 2B$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5) $\cos B = 1/3$ ಆದಾಗ, $\sin 2B$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6) $\tan\theta = 7/2$ ಆದಾಗ, $\sin 2\theta$ ಮತ್ತು $\cos 2\theta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7) $\sin\alpha = 2/3$ ಆದಾಗ, $\sin 3\alpha$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8) $\cos\beta = 5/2$ ಆದಾಗ, $\cos 3\beta$ ಮತ್ತು $\cos 2\beta$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9) $\sin A = 3/5$ ಆದಾಗ, $\tan A$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ $\tan 2A$ ಮತ್ತು $\tan 3A$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10) $\cot\alpha = 7/5$ ಮತ್ತು $\cot\beta = 5/7$ ಆದಾಗ, $\cot(\alpha+\beta)$ ಮತ್ತು $\tan(\alpha-\beta)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

1) $\sin 2A = \tan A\,(1+\cos 2A)$

2) $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

3) $\tan A/2 + \cot A/2 = 2\operatorname{cosec} A$

4) $\cot^2 B/2 = \dfrac{1+\cos B}{1-\cos B}$

5) $(1+\sin\theta) = (\sin\theta/2 + \cos\theta/2)^2$

6) $(\cos\theta/2 - \sin\theta/2)^2 = 1 - \sin^2\theta$

7) $\cot A = \dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}$

8) $\operatorname{cosec} 2\alpha = 1/2 \sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha$

9) $\tan^2 A/2 = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$

10) $\sec 2\beta = \frac{1+\tan^2\beta}{1-\tan^2\beta}$

11) $(\sin\phi/2+\cos\phi/2)^2+(\cos\phi/2-\sin\phi/2)^2=2$

12) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

13) $\sin\theta = x - \frac{1}{x}$ ಆದಾಗ, $\cos 2\theta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14) $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ ಆದಾಗ, $\cos 2\theta$ ಮತ್ತು $\cos 3\theta$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

9.1: ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ,

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \rightarrow (1)$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \rightarrow (2)$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \rightarrow (3)$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \rightarrow (4)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B \rightarrow (5)$

ಸಮೀಕರಣ(1) ಮತ್ತು (2)ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \rightarrow (6)$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4) ರ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳುಂಟಾಗುವುವು.

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B \rightarrow (7)$

$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B \rightarrow (8)$

ಈಗ $A+B = C$ ಮತ್ತು $A-B = D$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore A = \frac{C+D}{2}, \qquad B = \frac{C-D}{2}$$

ಆಗ ಮೇಲಿನ (5), (6), (7) ಮತ್ತು (8) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವುವು.

$$\therefore \sin C+\sin D=2\sin\frac{(C+D)}{2}\cos\frac{(C-D)}{2}\rightarrow(5)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{(C+D)}{2}\sin\frac{C-D}{2}\rightarrow(6)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{(C+D)}{2}\cos\frac{(C-D)}{2}\rightarrow(7)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{(C+D)}{2}\sin\frac{(D-C)}{2}\rightarrow(8)$$

$D>C$ ಆದರೆ, $\cos D>\cos C$. $\therefore \sin\frac{(D-C)}{2}>0$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ (sine) ಅಥವಾ ಕೊಸೈನ್ (cosine) ಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ 'ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$\sin C+\sin D=2\sin$(ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ) $\cos$ (ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ)

$\sin C-\sin D=2\cos$ (ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ) $\sin$ (ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ)

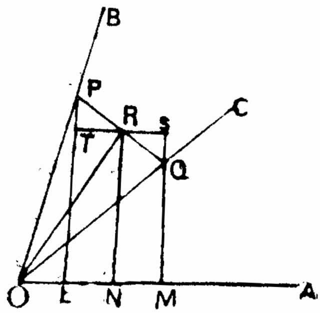
$\cos C+\cos D=2\cos$ (ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ) $\cos$ (ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ)

$\cos C-\cos D=2\sin$ (ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ) $\sin$ (2ನೆಯ ಕೋನದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಕೋನ ಕಳೆದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ)

9.2: ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ :

C ಮತ್ತು D ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $C>D$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle AOB=C$ ಮತ್ತು $\angle AOC=D$ ಆಗಿರಲಿ. OB ಮತ್ತು OC ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $OP=OQ$ ಆಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. R ಎಂಬುದು PQರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. $OR\perp PQ$ ಮತ್ತು $\angle POQ$ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. PL, QN ಮತ್ತು RN ರೇಖೆಗಳನ್ನು OAಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. R ಮೂಲಕ TS ರೇಖೆಯನ್ನು OA ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಮತ್ತು PL ಮತ್ತು QMಗಳನ್ನು T ಮತ್ತು S ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 40

ತ್ರಿಭುಜ PTR ಮತ್ತು QSRಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

$\therefore PT=RS,\ TR=RS$ $\quad\quad \therefore RN=\frac{1}{2}(PL+MQ)$

ಮತ್ತು $ON=\frac{1}{2}(OL+OM)$

ಈಗ $\angle POQ=C-D$ ಮತ್ತು OR, $\angle POQ$ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore\ \angle POR=\angle ROQ=\frac{1}{2}(C-D)$ ಮತ್ತು

$\angle AOR=D+\frac{1}{2}(C-D)=\frac{1}{2}(C+D)$

ಹಾಗೂ $\angle RPL=ROL=\frac{1}{2}(C+D)$

(i) $\sin C+\sin D=\dfrac{PL}{OP}+\dfrac{MQ}{OQ}=\dfrac{PL+MQ}{OP}$

$$=\frac{2RN}{OP}$$

$$=\frac{2\,RN}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}$$

$$=2\sin\angle NOR\,.\,\cos\angle POR$$

$$=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\boxed{\sin C+\sin D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)}$$

(ii) $\sin C-\sin D=\dfrac{PL}{OP}-\dfrac{MQ}{OR}=\dfrac{PL-MQ}{OP}$

$$=\frac{2PT}{OP}$$

$$=\frac{2PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=2\cos\angle TPR\,.\,\sin\angle POR$$

$$=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cdot\sin\frac{(C-D)}{2}$$

$$\boxed{\therefore\sin C-\sin D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)}$$

(iii) $\cos C+\cos D=\dfrac{OL}{OP}+\dfrac{OM}{OQ}$

$$=\frac{OL+OM}{OP}=2\frac{ON}{OP}$$

$$=2\frac{ON}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}$$

$$=2\cos\angle ROL\,.\,\cos\angle POR$$

$$=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\therefore \cos c + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

(iv) $\cos C - \cos D = \frac{OL}{OP} - \frac{OM}{OQ}$

$$= \frac{OL-OM}{OR}$$

$$= -2\,\frac{LN}{OP}$$

$$= -2\,\frac{TR}{OP}$$

$$= -2\,\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$= -2\sin\angle TPR \sin\angle POR$$

$$= 2\sin\angle TPR[-\sin\angle POR]$$

$$= 2\sin\frac{(C+D)}{2}\left[-\sin\frac{(C-D)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(ಅ) ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

1) $\sin 2A + \sin 4A = 2\sin\frac{(2A+4A)}{2}\cdot\cos\frac{2A-4A}{2}$

$$= 2\sin\frac{6A}{2}\cdot\cos\left(\frac{-2A}{2}\right)$$

$$= 2\sin 3A \,.\, \cos A$$

$$(\because \cos(-A) = \cos A)$$

2) $\sin 10A - \sin 6A = 2\cos\left(\frac{10A+6A}{2}\right) . \sin\left(\frac{10A-6A}{2}\right)$

$$= 2\cos 8A \,.\, \sin 2A$$

3) $\cos 8A - \cos 12A = 2\sin\left(\frac{8A2+1A}{2}\right) . \sin\left(\frac{12A-8A}{2}\right)$

$$= 2\sin 10A . \sin 2A$$

4) $\cos 7A + \cos 5A = 2\cos\left(\frac{7A+5A}{2}\right) . \cos\left(\frac{7A-5A}{2}\right)$

$$= 2\cos 6A \cos A$$

(ಆ) **ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವಿಕೆ**

1) $\sin 4\alpha \,.\, \cos 3\alpha = \frac{1}{2}[\sin(4\alpha+3\alpha)+\sin(4\alpha-3\alpha)]$
$= \frac{1}{2}[\sin 7\alpha + \sin\alpha]$

2) $\cos 5\beta \sin 2\beta = \frac{1}{2}[\sin(5\beta+2\beta)-\sin(5\beta-2\beta)]$
$= \frac{1}{2}[\sin 7\beta - \sin 3\beta]$

3) $\cos 14\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\cos(14\theta+4\theta)+\cos(14\theta-4\theta)]$
$= \frac{1}{2}[\cos 18\theta + \cos 10\theta]$

4) $\sin 7\beta \sin 15\beta = \frac{1}{2}[\cos(7\beta+15\beta)-\cos(15\beta-7\beta)]$
$= \frac{1}{2}[\cos 22\beta - \cos 8\beta]$

ಇ) 1) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\theta)+\sin(\theta-\alpha)$

$= 4\sin\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

L.H.S. $= \sin(\alpha-\beta) + [\sin(\beta-\theta)+\sin(\theta-\alpha)]$

$= \sin(\alpha-\beta) + [2\sin\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta-2\theta+\alpha}{2}\right)]$

$= 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta-2\theta+\alpha}{2}\right)$

$= 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\ [\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - \cos(\frac{\beta-2\theta+\alpha}{2})]$

$= 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\ [2\sin\frac{\alpha-\theta}{2})\ \sin(\frac{\beta-\theta}{2})]$

$= 4\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\ \sin(\frac{\beta-\theta}{2})\ [-\sin(\frac{\theta-\alpha}{2})]$

$= -4\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\ \sin(\frac{\beta-r}{2})\ \sin(\frac{r-\alpha}{2})$

2) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\sin A+\sin B+\sin C$

$=4\cos A/2\ \cos B/2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

L.H.S. $=\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin(\frac{A+C}{2}\ \cos\frac{(A-B)}{2}+2\sin\ C/2\ \cos\ C/2$

$=2\cos\ C/2\ \cos\frac{(A-B)}{2}+2\sin\ C/2\ \cos\ C/2$

$\because (\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C)$

$\therefore \sin\frac{(A+B)}{(2)}=\sin(90^\circ-C/2)=\cos\ C/2$

$=2\cos\ C/2\left\{\cos\frac{(A-B)}{2}+\cos\frac{(A+B)}{2}\right\}$

$=2\cos\frac{C}{2}[2\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}]$

$4\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}$

3) $A+B+C=180^\circ$ ಆದಾಗ,

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}$

$\sin\frac{C}{2}$

$$\therefore H.S = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B)}{2} - \sin\frac{C}{2}\right.\right.$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{(A-B)}{2} - \cos\frac{(A+B)}{(2)}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ವಿ. ಸೂ.:

$$A+B+C = 180^\circ$$

$$\therefore A/2 + B/2 + C/2 = 90^\circ$$

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅರ್ಧ ಕೋನವು ಉಳಿದೆರಡು ಅರ್ಧಕೋನಗಳ ಪೂರಕ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \cos\frac{A+C}{2} = \sin C/2$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos C/2$$

$$\sin\frac{C+A}{2} = \cos B/2$$

$$\cos\frac{C+A}{2} = \sin B/2$$

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos A/2$$

$$\cos\frac{(B+C)}{2}=\sin B/2$$

$$\tan\frac{(A+B)}{2}=\cot C/2$$

$$\tan\frac{(B+C)}{2}=\cot A/2$$

$$\tan\frac{(C+A)}{2}=\cot B/2$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

ಅ) ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ:

1) $2\sin 4\theta \cos\theta$
2) $2\cos 7\theta \sin 3\theta$
3) $2\cos 2\theta \cos 6\theta$
4) $2\sin 8\theta \sin 13\theta$
5) $-\sin\frac{1}{4}A \sin A$
6) $\cos 5/8\alpha \sin 3/8\alpha$
7) $\cos(\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+\beta)$
8) $\sin(\theta+5\phi)\sin(5\theta-\phi)$
9) $\sin\alpha \sin 3\alpha \sin 6\beta$
10) $\cos 2\beta \cos\beta \cos 4\beta$

ಆ) ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ:

1) $\sin 12A+\sin 6A$
2) $\sin 7\alpha-\sin 15\alpha$
3) $\cos 8\phi+\cos 5\phi$
4) $\cos 9\beta-\cos 13\beta$
5) $\sin\frac{(\theta+\phi)}{2}+\sin\frac{(\theta-\phi)}{2}$
6) $\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}-\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}$
7) $\sin\frac{C}{A}-\sin\frac{3}{4}C$
8) $\cos\frac{7}{8}D-\cos\frac{1}{8}D$
9) $\sin(\theta+2\phi)+\sin(6\theta-\phi)$
(10) $\sin\frac{(\alpha+2\beta+\theta)}{2}-\sin\frac{[\alpha-\beta-\theta]}{2}$

ಇ) (i) ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಾಗಿಯೂ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ$	5) $\cos 70^\circ - \cos 50^\circ$
2) $\cos 150^\circ \sin 30^\circ$	6) $\cos 70^\circ . \cos 10^\circ$
3) $\cos 50^\circ + \cos 40^\circ$	7) $\sin 215^\circ . \sin 45^\circ$
4) $\sin 50^\circ - \sin 10^\circ$	8) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ$

(ii) $A+B+C=180^\circ$ ಆದಾಗ, $\sin 2(A+B+C) = 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಈ) $A+B+C=180^\circ$ ಆದಾಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$

2) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C$

3) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\cos A \cos B \cos C$

4) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A \cos B \sin C$

5) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$

6) $\cos A - \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} - 1$

(ಉ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ:

1) $\frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{\sin(A+B)+\sin(A-B)} = \cot A$

2) $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}=\cot B$

3) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\cot\dfrac{(\alpha-\beta)}{2}$

4) $\dfrac{\cos\alpha-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\alpha}=\tan\dfrac{(\theta-\alpha)}{2}$

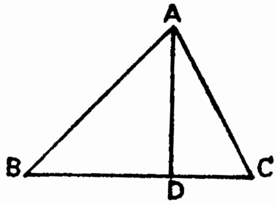
ಅಧ್ಯಾಯ 10

ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು

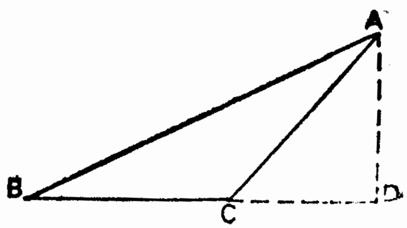
ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ BC ಬಾಹುವನ್ನು 'a' ಇಂದಲೂ CA ಬಾಹುವನ್ನು 'b' ಇಂದಲೂ ಮತ್ತು AB ಬಾಹುನ್ನು 'C' ಇಂದಲೂ, ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ- ಹಾಗೆಯೇ A, B, ಮತ್ತು C ಗಳು ABC ತ್ರಿಭುಜದ $\angle BAC$, $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ ಮತ್ತು $2S = a + b + c$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ ಕೆಳಕಂಡ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ.

10.1: ಸೈನ್ ನಿಯಮ:

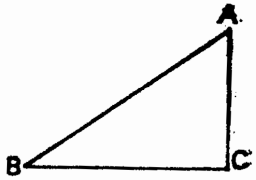
ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ.



ಚಿತ್ರ 44 (i)



ಚಿತ್ರ 44 (ii)



ಚಿತ್ರ 44 (iii)

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಯು BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ B ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ AD ಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಗಡೆ ಇದೆ. ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ C ಕೋನವು ಅಧಿಕಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಲಂಬವು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ C ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ C ಮತ್ತು D ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿವೆ.

ABD ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ [ಮೂರು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ]

$AD = AB \sin B$

ಅಥವಾ $AD = c \sin B$

ADC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

ಚಿತ್ರ (i) $AD = AC \sin C = b \sin C$

ಚಿತ್ರ (ii) $AD = AC \sin \angle ACD = AC \sin(180^\circ - C)$

$= AC \sin C = b \sin C$

ಚಿತ್ರ (iii) $AD = AC \sin 90^\circ = b = AC \sin C = b \sin C$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$b \sin C = c \sin B$

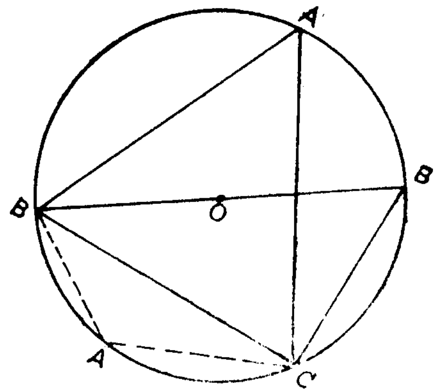
ಅಥವಾ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

ಹೀಗೆಯೇ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

10.11 ಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬೇರೊಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು:

ABC ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಅದರ ವ್ಯಾಸವು BOB′ ಆಗಿರಲಿ. B′C ಸೇರಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು R ಆಗಿರಲಿ. ಆ BB′=2R.



ಚಿತ್ರ 45

(i) $\angle BAC$ಯು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದಾಗ, B' ಮತ್ತು A ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಕಂಸದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ BCB' ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ

$$\frac{BC}{BB'} = \sin \angle BB'C$$

$$= \sin \angle BAC$$

$$\therefore \frac{a}{2R} = \sin A, \text{ ಅಥವಾ } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

(ii) $\angle BAC$ ಯು ಅಧಿಕ ಕೋನವಾಗಿದ್ದಾಗ, B' ಬಿಂದುವು BAC ಕಂಸದ ಹೊರಗೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle BB'C$ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore BB'C$ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$BC = BB' \sin \angle BB'C = BB' \sin \angle BAC$$

ಅಥವಾ $a = 2R \sin A$

i.e. $\frac{a}{\sin A} = 2R$

(iii) $\angle BAC = 90^\circ$ಆಗಿದ್ದಾಗ, B′ ಬಿಂದುವು C ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯ ವಾಗುವುದು.

ಆಗ, $BC = BB' = 2R = 2R\sin 90^\circ = 2R\sin A$

ಆದುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

ಹೀಗೆಯೇ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\boxed{\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R} \rightarrow (1)$$

10.2 : **ಪ್ರಕ್ಷೇಪದ ಸೂತ್ರಗಳು** :

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ.

ಸಾಧನೆ: A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ADಯನ್ನು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ADಯು BCಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

(i) C ಕೋನವು ಲಘುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ADಯು BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ B ಮತ್ತು Cಗಳ ನಡುವೆ. ಇರುತ್ತದೆ. [ಚಿತ್ರ (i)]

ಆಗ $BC = BD + DC$

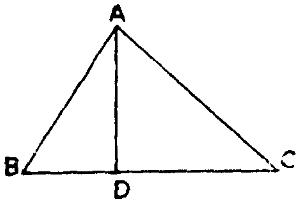
ಆದರೆ $BD = AB\cos B$ ಮತ್ತು

$DC = AC\cos C$

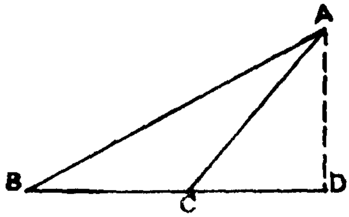
$\therefore BC = AB\cos B + AC\cos C$

i.e. $a = c \cos B + b \cos C$

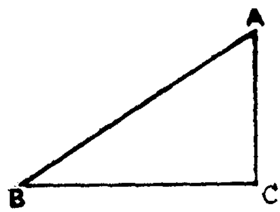
$$\therefore \; a = c \cos B + b \cos C$$



ಚಿತ್ರ 46(i)



46 (ii)



ಚಿತ್ರ 46(iii)

ii) C ಕೋನವು ಅಧಿಕಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ D ಬಿಂದುವು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

ಆಗ $BC = BD - CD = AB \cos B - AC \cos \angle ACD$
$= c \cos B - b \cos (180° - C)$

$$\therefore \; a = c \cos B + b \cos C$$

$[\because \cos(180° - C) = -\cos C]$

(iii) C ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, $b \cos C = b \cos 90° = 0$

$\therefore a = AB \cos B = c \cos B + b \cos C$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ
$a = c \cos B + b \cos C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದೆವು.

ಹೀಗೆಯೇ $b = a \cos C + c \cos A$ ಮತ್ತು
$c = b \cos A + a \cos B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ,

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$c = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

ಪ್ರಕ್ಷೇಪದ ಸೂತ್ರಗಳು

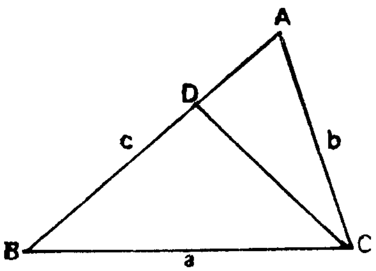
10.3 : ಕೋಸೈನ್ ನಿಯಮ :

ಇದು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ನಿಯಮ

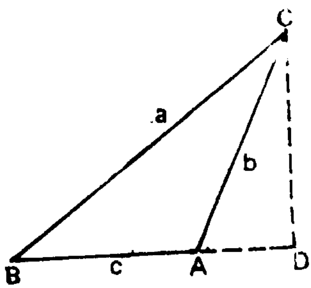
ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

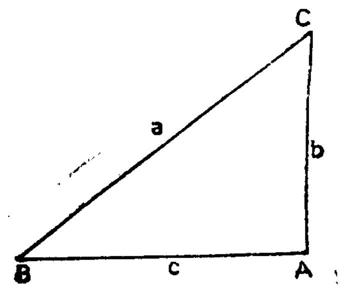
ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ



ಚಿತ್ರ 47 (i)



ಚಿತ್ರ 47(ii)



ಚಿತ್ರ 47 (iii)

ಸಾಧನೆ : ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $CD \perp AB$

(i) A ಕೋನವು ಲಘುಕೋನವಾಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ (i)]

ಪೈಥಾಗೊರಾಸನ ವಿಸ್ತರಣಾ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AD$$

i.e. $a^2 = b^2 + c^2 - 2c\ AC\ \cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\ \cos A$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

(ii) A ಕೋನವು ಅಧಿಕಕೋನವಾಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ (ii)].

$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB.AD$

$= AC^2 + AB^2 + 2AB.AC\ \cos\ \angle CAD$

$= AC^2 + AB^2 + 2AB.AC\cos(180° - A)$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC.AB\ \cos A$

$$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

(iii) A ಕೋನವು ಸಮಕೋನವಾಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ (iii)].

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = AC^2 + AB^2 = 2AB.AC\ \cos 90°$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$

∴ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದೆವು.

ಹೀಗೆಯೇ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos B$ ಮತ್ತು

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad \begin{array}{|l|} \hline a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A \\ b^2 = b^2 + a^2 - 2ca\ \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C \\ \hline \end{array}$$ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ

10.4 :

ಅ) $$\left.\begin{array}{l} a = b\ \cos C + c\ \cos B \\ b = c\ \cos A + a\ \cos C \\ c = a\ \cos B + b\ \cos A \end{array}\right\} \rightarrow I$$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$$(a+b+c)=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C \rightarrow(1)$$

ಸೂತ್ರ (I) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ನಂತರ ಕೂಡಿದರೆ,

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C) \rightarrow(2)$$

ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಆ) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$$

i.e. $(a^2+b^2+c^2)=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C \rightarrow(3)$

ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ,

ಇ) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$.

$c=2R\sin C$ ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿರಿ.

ಆಗ, $4R^2\sin^2A=4R^2(\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A)$

ಅಥವಾ $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=2\sin B\sin C\cos A$

ಹಾಗೆಯೇ $\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B=2\sin C\sin A\cos B$

ಮತ್ತು $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

10.5 ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಸೂತ್ರ:

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ:

$$R.H.S.=\frac{b-c}{b+c}=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R(\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{(B+C)}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}}{2\sin\frac{(B+C)}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{(B-C)}{2}}{\tan\frac{(B+C)}{2}}$$

i.e. $\tan\frac{(B-C)}{2}=\frac{(b-c)}{(b+c)}\tan\frac{(B+C)}{2}=\frac{(b-c)}{(b+c)}\cot\frac{A}{2}$

$$\boxed{\therefore \tan\frac{(B-C)}{2}=\frac{(b-c)}{(b+c)}\cot\frac{A}{2}}$$

ಅಥವಾ $\boxed{\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{(B-C)}{2}}{\tan\frac{(B-C)}{2}}}$ ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರ.

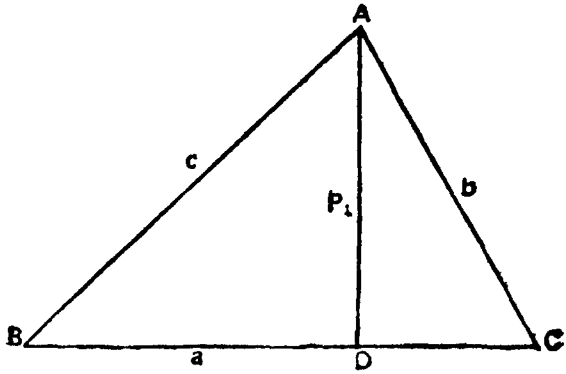
10.6. ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲಿ:

A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು p_1 ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore p_1=c\sin B=b\sin C$

ಹೀಗೆಯೇ p_2, p_3ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ $p_2 = a \sin C = c \sin A$; $P_3 = a \sin B = b \sin A$



ಚಿತ್ರ 48

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ

ಅಥವಾ $\left.\begin{aligned}\triangle &= \tfrac{1}{2}ap_1 = \tfrac{1}{2}a\,b \sin C\\ &= \tfrac{1}{2}ac \sin B\end{aligned}\right\} \rightarrow (1)$

ಮತ್ತು ಅಥವಾ $\left.\begin{aligned}\triangle\ \tfrac{1}{2}bp_2 &= \tfrac{1}{2}ba \sin C\\ &= \tfrac{1}{2}bc \sin A\end{aligned}\right\} \rightarrow (2)$

ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $= \triangle = \frac{1}{2} \times ab \sin C$

$= \frac{1}{2} \times 2R \times \sin A \times 2R \sin B \times \sin C$

$$\boxed{\therefore \quad \triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C} \rightarrow (3)$$

$\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C$

$= \frac{1}{2} a\, b. \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$

$$\therefore \quad \boxed{\triangle = \frac{abc}{4R}} \rightarrow (4)$$

ಹಾಗೂ pಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$p = b\sin C = b \times \frac{c}{2R}$$

ಅಥವಾ $\boxed{bc = 2Rp} \rightarrow (5)$

ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

10.7: ಬಾಹುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಸೂತ್ರ

ಕೋಸೈನ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow (1)$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$$

i.e. $\sin^2 A = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

S = ಅರ್ಧವೃತ್ತಪರಿಧಿ ಆದರೆ, ಆಗ

$$2S = a + b + c$$

$$\therefore \sin^2 A = \frac{2S \times (2S - 2a)(2S - 2b)(2S - 2c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{4S(S-a)(S-b)(S-c)}{b^2c^2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{bc}$$

ಹೀಗೆಯೇ, $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

ಮತ್ತು $\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \triangle = \frac{1}{2}\, bc \sin A$

$$= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

$\triangle = \frac{abc}{4R}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore R = \frac{abc}{4\triangle} = \frac{abc}{4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

10.8: ಅರ್ಧಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2S(2S-2a)}{2bc} = \frac{2S(S-a)}{bc}$$

ಹೀಗೆಯೇ, $1 + \cos A = \frac{2(S-b)(S-c)}{bc}$

ಆದರೆ $1 + \cos A = 2\cos^2 A/2$ ಮತ್ತು $1 - \cos A = 2\sin^2 A/2$

$$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{S(S-a)}{bc} \text{ ಮತ್ತು } \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(S-b)(S-c)}{2bc}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}},\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

ಹೀಗೆಯೇ B/2 ಮತ್ತು C/2 ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$S(S-a)\tan\frac{A}{2}=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\Delta$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2}=\frac{\Delta}{S(S-a)}$$

$$\therefore (S-a)\tan\frac{A}{2}=\frac{\Delta}{3}$$

ಹೀಗೆಯೇ, $(S-b)\tan\frac{B}{2}=\frac{\Delta}{3}$ ಮತ್ತು

$$(S-c)\tan\frac{C}{2}=\frac{\Delta}{3}$$

$$\therefore \cot=\frac{S(S-a)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{B}{2}=\frac{S(S-b)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{S(S-c)}{\Delta}$$

$$\therefore \Sigma\cot^2\frac{A}{2}=\frac{S[(S-a)+(S-b)+(S-c)]}{\Delta}$$

$$=\frac{S^2}{\Delta}=\frac{(a+b+c)^2}{4\Delta}$$

$$\boxed{\therefore \Sigma\cot^2\frac{A}{2}=\frac{S^2}{\Delta}}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) $a \sin(B-C)+b \sin(C-A)+c \sin(A-B)=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$L.H.S. = \Sigma 2R \sin A \sin(B-C)$$
$$= 2R \Sigma \sin(B+C) \sin(B-C)$$
$$= 2R \Sigma(\sin B \cos C+\cos B \sin C)(\sin B \cos C - \cos B \sin C)$$
$$= 2R \Sigma(\sin^2 B \cos^2 C-\cos^2 B \sin^2 C)$$
$$= 2R \Sigma[\sin^2 B(1-\sin^2 C)-(1-\sin^2 B) \sin^2 C]$$
$$= 2R \Sigma [\sin^2 B-\sin^2 B \sin^2 C-\sin^2 C+\sin^2 B \sin^2 C]$$
$$= 2R \Sigma [\sin^2 B-\sin^2 C]$$
$$= 2R [\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A -\sin^2 B]$$
$$=0=R.H.S$$

2) $\Sigma a(\sin B-\sin C)=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \Sigma a (\sin B-\sin C)$$
$$=a\sin B - a\sin C+b\sin C-b\sin A+c\sin A-c \sin B$$
$$=a \frac{b}{2R}-\frac{ac}{2R}+\frac{bc}{2R}-\frac{ba}{2R}+\frac{ca}{2R}-\frac{cb}{2R}$$
$$=0=R.H.S.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

1) $a^2-b^2=c (a \cos B - b \cos A)$
2) $2R\, a \sin (B-C) =b^2-c^2$

3) $(b^2-c^2)\sin A=a^2\sin(B-C)$

4) $\Sigma(a^2-b^2)=0$

5) $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$

6) $b^2-c^2=a(b\cos C-c\cos B)$

7) $\Sigma(c-a)\sin B=0$

8) $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$

9) $\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a\sin(B-C)}$

10) $\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)=\frac{a-c}{b}\cos\frac{B}{2}$

11) $(a^2-b^2)\sin(A+B)=c^2\sin(A-B)$

12) $(a^2+b^2+c^2)=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

13) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

14) $\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C+\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B=0$

15) $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{c}{2}$

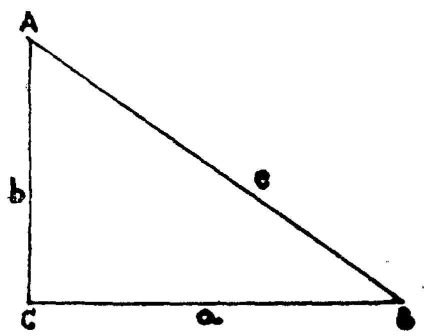
16) $(b+c)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)=(b-c)\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)$

ಅಧ್ಯಾಯ 11

ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

11.1 : ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ :

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು A,B,C, ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಆ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b ಮತ್ತು c ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 49

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು :

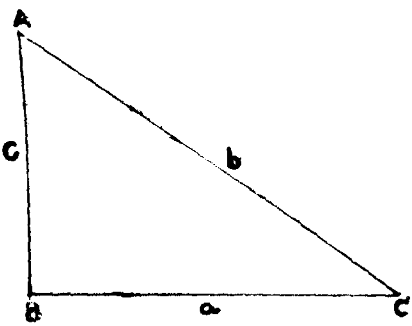
ಅ) ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ಆ) ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ಆ) ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮತ್ತು

ಈ) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.

ಅ) ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ :



ಚಿತ್ರ 50

ABCಯು ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. ಕರ್ಣ$=$b ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು AB$=$ c ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.

Cಕೋನವನ್ನು $\sin c = \frac{c}{b}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ಮತ್ತು

$A=90^\circ-c$ ಸಂಬಂಧದ ಸಹಾಯದಿಂದ A ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

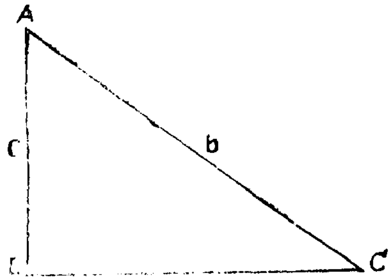
ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ a ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$a=b\ \cos C$ ಅಥವಾ $\tan C=\frac{c}{a}$

ಅಥವಾ $a^2=b^2-c^2$

ಅ) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ.

ABC ಯು ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. $B=90°$. a ಮತ್ತು c ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ. ಆಗ b ಬಾಹುವನ್ನು $b^2=c^2+a^2$ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.ಅಥವಾ $\sin C=\frac{c}{b}$ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 51

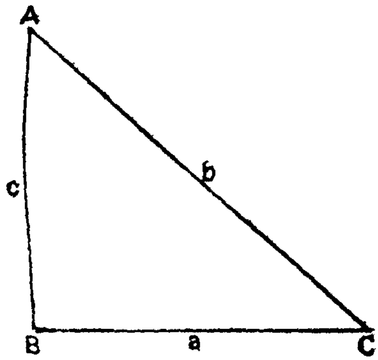
$\tan C=\frac{c}{a}$ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ C ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. C ಕೋನದ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕ ಕೋನವು A ಕೋನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{i.e.}\quad A=90°-C$$

ಇ) ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ:

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $B=90°$. ಕರ್ಣ b ಮತ್ತು ಲಘುಕೋನ C ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ. ಆಗ $A=90°-C$ ಸಹಾಯದಿಂದ A ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

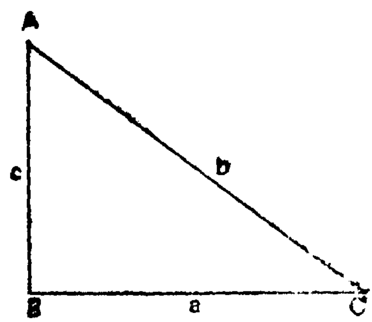
$\sin C = \frac{c}{b}$ ಮತ್ತು $\cos C = \frac{a}{b}$ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ c ಮತ್ತು a ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 52

ಈ) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ:

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $B = 90°$. ಒಂದು ಬಾಹು c ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘು ಕೋನ A ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 53

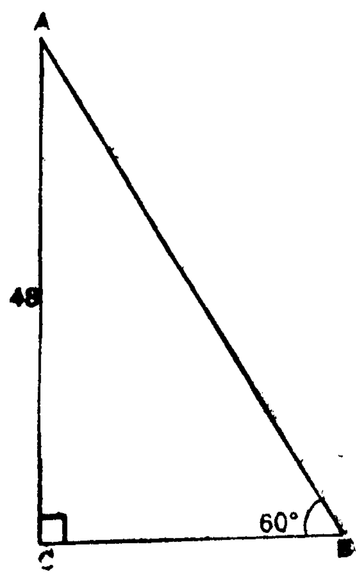
ಆಗ $C = 90° - A$ ಸಹಾಯದಿಂದ C ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು

$\cos A = \frac{c}{b}$ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮತ್ತು $a^2 = b^2 - c^2$ ಸಹಾಯದಿಂದ 'a' ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) $B = 60°$, $C = 90°$, $c = 48$, ಆದರೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 54

$A = 90° - 60° = 30°$.

$\sin 60° = \frac{c}{AB} = \frac{c}{b} = \frac{48}{b}$

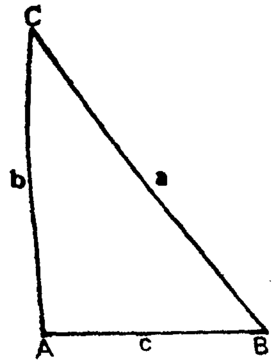
$$\therefore b=\frac{48}{\sqrt{3}/2}=\frac{96}{\sqrt{3}}=\frac{96\sqrt{3}}{3}=32\sqrt{3}$$

$$\cos B=\frac{a}{b}=\frac{a}{32\sqrt{3}}$$

$\therefore a=\cos B\ 32\sqrt{3}=\cos 60°\cdot 32\sqrt{3}=\frac{1}{2}32\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

$a\ \therefore 16\sqrt{3}$, $b=32\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $A=30°$.

2) $A=90°$, $a=5$, $c=3$ ಆದರೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ



ಚಿತ್ರ 55

$\therefore b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=25-9=16$. $\therefore b=4$

$\sin B=\frac{b}{a}=\frac{4}{5}=0.8$ $\therefore B=53°\ 12'$

$\therefore C=90°-53\ 12'=36°\ 48'$

$\therefore b=4$, $B=53°\ 12'$, $C=36°\ 48'$

ಅಭ್ಯಾಸ 11 (ಅ)

ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ

(ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರಿ.)

1) $B=90°$, $a=1$, $b=\sqrt{2}$

2) $B=90°$, $C=3/2$, $b=\sqrt{3}$

3) $A=90°$, $b=4$, $c=4$

4) $a=12$, $b=6\sqrt{3}$, $A=90°$

5) $b=2\sqrt{3}$, $A=90°$, $C=30°$

6) $A=30°$, $B=60°$, $b=40$

7) $A=53°$, $B=90°$, $b=100$

8) $a=15$, $A=30°$, $b=30$

9) $a=1$, $b=2$, $B=90°$

10) $c=90°$, $B=30°$. $c=10$

11.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು:

ಅ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನುಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ:

ತ್ರಿಭುಜ ABCಯ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಕೋನಗಳನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು;

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-c)(S-a)}{S(S-b)}}$$

ಮತ್ತು $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ;

ಅದರ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾ: $\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\log(S-b)+\log(S-c)$
$-\log S-\log(S-a)]$

ಹೀಗೆ A/2 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ... tan B/2 ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, B ಕೋನವನ್ನು ಮತ

$C = 180° - (A+B)$ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ C ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ A, B ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅಥವಾ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$ ಮತ್ತು

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಆ) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ:

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ b ಮತ್ತು c ಬಾಹುಗಳೂ ಮತ್ತು A ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = 2R$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ $\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2(Rb-Rc)}{2(Rb+Rc)} = \frac{b-c}{b+c}$

$$\text{i.e. } \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\text{i.e. } \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\tan\frac{B+C}{2}$$

$$= \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} \left[\because \frac{B+C}{2} = 90° - A/2\right]$$

ಈಗ ಎರಡೂ ಕಡೆಯೂ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\log\tan\frac{B-C}{2} = \log(b-c) - \log(b+c) + \log\cot\frac{A}{2}$$

ಈ ರೀತಿ $\frac{B-C}{2}$ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮತ್ತು $90° - \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು [ಕಳೆದು ಮತ್ತು ಕೂಡು ವುದರಿಂದ] B ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಂತರ $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ

'a' ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು

ಇ) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ :

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ B ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳೂ ಮತ್ತು 'a' ಬಾಹುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.

ಆಗ $A = 180° - (B+C)$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ A ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಂತರ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ ಮತ್ತು $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ ಇವುಗಳನ್ನು

ಉಪಯೋಗಿಸಿ b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಈ) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಬಾಹುಗಳೂ ಹಾಗೂ B ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿ.

ಆಗ $\sin A = \frac{a}{b} \sin B$ ಸಹಾಯದಿಂದ A ಕೋನವನ್ನೂ ಮ

$C = 180° - (A+B)$ ಸಹಾಯದಿಂದ C ಕೋನವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಂತರ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ ಸಹಾಯದಿಂದ 'c' ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $a=2$, $b=3$, $c=4$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಕೋಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡರೆ,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} = 0.875$$

$\therefore A = 29°4'$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ)

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ab} = \frac{16+4-9}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{11}{12} = 0.925$$

$\therefore B = 22°20'$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ)

$$\therefore C = 180° - (A+B) = 180° - (51°24') = 128°36'$$

$\therefore A = 29°4'$, $B = 22°20'$, ಮತ್ತು $C = 128°36'$

2) $a=12$, $b=10$ ಮತ್ತು $C=36°52'$ ಆದರೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಕೋಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab \cos C \\ &= 144+100-240 \times \cos 36°52' \\ &= 244-240 \times 0.8004 \quad (\because \cos 36° 52' = 0.80 \\ &= 244-192.10 \\ &= 51.90 \end{aligned}$$

$\therefore\ 2 \log c = \log 51.90 = 1.7152$

$\therefore\ \log c = \frac{1}{2}(1.7152) = 0.8576$

$\therefore\ c = 7.224$ ಅಥವಾ $c = 7.2$

ಈಗ ಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{12 \times \sin 36°52'}{7.2} = \frac{\sin 36°52'}{0.6}$$

$$= \frac{0.5999}{0.6} = 0.9998$$

$\therefore\ A = 89°$

$\therefore B = 180 - (A + B) = 180 - (125°52') = 54°08'$

$\therefore c = 7.2, \quad A = 89°, \quad B = 54°08'$

3) $A = 45°,\ B = 60°,\ b = \sqrt{6}$ ಆದರೆ

ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$C = 180° - (A + B) = 180 - (105°) = 75°$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} \sin 45°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6}.\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \sin 75°}{\sin 45°} = \frac{2 \times \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + 1$$

$\therefore C = 75°,\ a = 2,\ C = \sqrt{3} + 1$

4) $b = 14,\ c = 20$ ಮತ್ತು $B = 25°$ ಆದರೆ

ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\sin C = \frac{C \sin B}{b} = \frac{20 \sin 25°}{14} = \frac{10 \times 0.4226}{7}$$

$$= 0.6037$$

$$\therefore C = 37°8'$$

$$\therefore A = 180° - (B + C) = 180° - (62°8') = 117°52'$$

ಈಗ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$= 14^2 + 20^2 - 2 \cdot 14 \cdot 20 \cos (117°\ 52')$$

$$= 196 + 400 - 560[-\cos(180° - 117°52')]$$

$$= 596 + 560 \times \cos (62°8')$$

$$= 596 + 560 \times 0.4980$$

$$= 596 + 278.88$$

$$= 874.88$$

ಎರಡೂ ಕಡೆಯೂ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$2 \log a = \log 874.88$$

$$= 2.9419$$

$$\therefore \log a = 1.47095$$

$$\therefore a = 29\text{-}51 = 29.5$$

$\therefore a = 29.5$, $A = 117°52'$ ಮತ್ತು $C = 37°8'$

ಅಭ್ಯಾಸ 11 (ಅ)

ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

(ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ):

1) $a = 1$, $b = 2$, $c = \sqrt{3}$
2) $a = 15$, $b = 17$, $c = 8$
3) $a = 10\sqrt{3}$, $b = 15$, $c = 5\sqrt{3}$
4) $a = 2$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $C = 60°$
5) $A = 105°$, $c = 15$, $b = \sqrt{6}$
6) $A = 45°$, $B = 105°$, $c = \sqrt{2}$
7) $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} - 1$
8) $c = 25$, $a = 26$, $b = 27$
9) $B = 120°$, $a = 2$, $b = \sqrt{6}$
10) $C = 135°$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $c = 2$

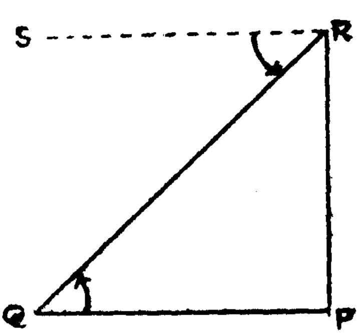
ಅಧ್ಯಾಯ 12

ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ ಅಥವಾ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯು ವಸ್ತುಗ
ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು
ಅಳತೆಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾ
ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

12.1 : ಉನ್ನತಕೋನ ಮತ್ತು ಅವನತಕೋನ :

R ಬಿಂದುವು, PR ಕಂಬದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. PQ ಕ್ಷಿತಿಜರೇ
ಯಾಗಿರಲಿ. Q ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನಿಗೆ R ಶೃಂಗವು QR ರೇಖೆ
ನೇರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಅಂದರೆ QR ಮತ್ತು PQ ರೇ
ಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಕೋನ ($\angle PQR$)ಕ್ಕೆ 'ಉನ್ನತ ಕೋನ' ಎಂದು ಹೆಸ
ಇಲ್ಲಿ R ಬಿಂದುವು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತುನೋಡುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನಿಗಿಂತ ಎತ್ತರವಾ
ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 56

ಈಗ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನು ಕಂಬದ ತುದಿಯಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ Q ಬ
ವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಆಗ Q ಬಿಂದುವು R ನಲ್ಲಿರುವ

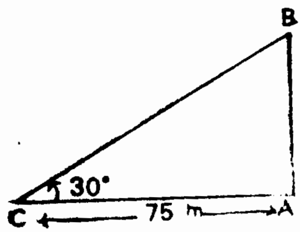
ನಿಗೆ RQ ರೇಖೆಯ ನೇರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ R ಬಿಂದುವಿನಿಂದ RS ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. RS ಮತ್ತು RQ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದಕೋನ ($\angle SRQ$)ಕ್ಕೆ 'ಅವನತ ಕೋನ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಇಲ್ಲಿ Q ಬಿಂದುವು R ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನಿಗಿಂತ ಕೆಳಮಟ್ಟ ದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

1) ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು 75 ಮಿ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 30°ಯ ಉನ್ನತಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡ ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ABಯು ಗೋಪುರ. A ಬಿಂದುವು ಗೋಪುರದ ಪಾದ. C ಬಿಂದುವು A ಪಾದದಿಂದ 75 ಮಿ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅಂದರೆ CA=75 ಮಿ.



ಚಿತ್ರ 57

AB ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$\angle ACB =$ ಉನ್ನತಕೋನ $= 30^\circ$

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}$

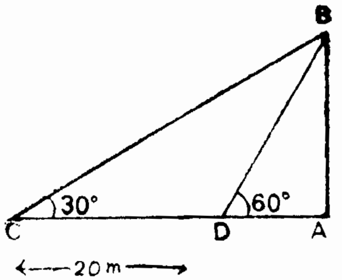
$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{75}$

$\therefore AB = \frac{75}{\sqrt{3}} = 25\sqrt{3}$ ಮಿ.

∴ AB ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $25\sqrt{3}$ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2) ಒಂದು ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಕೋನವು 30°. ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 20 ಮೀ. ದೂರ ಕಂಬದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುವುದರಿಂದ ಉನ್ನತಕೋನವು 60° ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

A ಯು ಕಂಬದ ಪಾದವಾಗಿರುತ್ತದೆ, C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಕೋನವು 30°. ಅದೇ ಉನ್ನತಕೋನವು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 60° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 58

CD = 20ಮೀ.

AD = x ಆಗಿರಲಿ.

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

$$\tan 30° = \frac{AB}{CA} = \frac{AB}{CD+DA} = \frac{AB}{20+x}$$

i.e. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{20+x} \quad \rightarrow (1)$

ABD ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

$$\tan 60° = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{x}$$

$$\therefore x = \frac{AB}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow (2)$$

(2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ, x ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{20+\frac{AB}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB\sqrt{3}}{20+\sqrt{3}+AB}$$

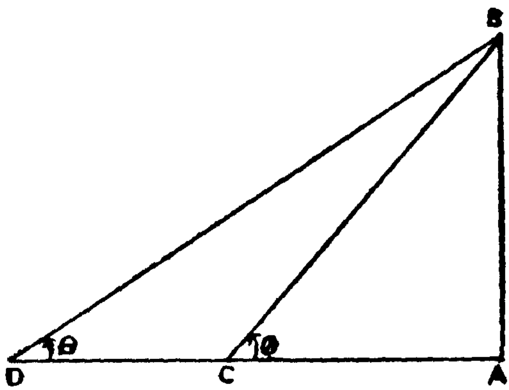
$\therefore 3AB = 20\sqrt{3} + AB, \quad \therefore 2AB = 20\sqrt{3}$

ಅಥವಾ $AB = 10\sqrt{3}$ ಮೀ.

$\therefore$ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು $10\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

12.2 : ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ, ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿದ್ದು ಕೈಗೆ ಸಿಗದ ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ:

AB ಯು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ. A ಬಿಂದುವು ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. Dಯು ವೀಕ್ಷಕಬಿಂದು. ಈಗ AB ಮತ್ತು ADಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 59

C ಯು DA ಮೇಲಿರುವ, Dನಿಂದ ಅಳತೆಮಾಡುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. CD=a. D ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಉನ್ನತಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ θ ಮತ್ತು ϕ ಆಗಿರಲಿ.

i.e. $\angle BDA=\theta$ ಮತ್ತು $\angle BCA=\phi$.

BCA ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$AB=BC \sin \phi$$

BDC ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\frac{\sin \theta}{BC}=\frac{\sin \angle DBC}{CD}$$

$$\therefore BC=\frac{CD \sin \theta}{\sin \angle DBC}=\frac{a \sin \theta}{\sin(\phi-\theta)} \rightarrow (2)$$

$$[\because \sin \theta+\sin \angle DBC=\sin \phi]$$

ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿನ BC ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಸಮೀಕರಣ(1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$AB=\frac{a \sin \theta \sin \phi}{\sin(\phi-\theta)}$$

ಅಥವಾ $\boxed{AB=a \sin \theta \sin \phi \operatorname{cosec}(\phi-\theta)}$

$$AD=DA=AB \cot \theta=a \sin\theta \sin\phi \operatorname{cosec}(\phi-\theta) \cot \theta$$

$$=a \cos\theta \sin \phi \operatorname{cosec}(\theta-\phi)$$

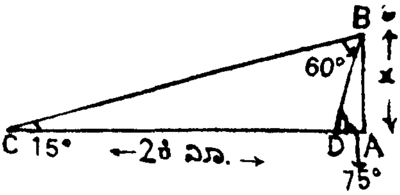
$$\therefore AD=\frac{a \cos\theta \sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}$$

ಅಥವಾ $\boxed{AD=a \cos \theta \sin \phi \operatorname{cosec}(\phi-\theta)}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1) ಒಂದೇ ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬನ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಒಂದು ಪರ್ವತ ಶಿಖರವು 15° ಉನ್ನತಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದೆ. ನಂತರ ಪರ್ವತದ ಪಾದದ ಕಡೆಗೆ 2 ಕಿ.ಮೀ. ನಡೆಯುವುದರಿಂದ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರ್ವತಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 75° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

ಪರ್ವತದ ಶಿಖರವು B ಬಿಂದುವೂ ಮತ್ತು ಪಾದವು A ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿರಲಿ. ...ಯು ವೀಕ್ಷಕ ಬಿಂದು. CD=2 ಕಿ.ಮಿಾ.



ಚಿತ್ರ 60

$\angle ADB$ ಕೋನವು, BDC ತ್ರಿಭುಜದ ಹೊರಕೋನ.

$\therefore \angle CBD = 60°$

ಈಗ BDC ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\frac{\sin 60°}{2} = \frac{\sin 15°}{BD}$$

$$\therefore BD = \frac{2 \times \sin 15°}{\sin 60°} = \frac{2 \times 0.25}{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{4 \times 0\ 25}{1.7}$$

$$= \frac{10}{17} \text{ ಕಿ.ಮಿಾ.}$$

ಈಗ ABD ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\frac{\sin 90°}{\frac{10}{17}} = \frac{\sin 75°}{x}$$

$$\therefore x = \frac{10}{17} \times \sin 75°$$

$$= \frac{10}{17} \times 0.96$$

$$= \frac{9.6}{17} = 0.5647 \text{ ಕಿ.ಮಿಾ.}$$

$\therefore x = 564{\cdot}7$ ಮೀ.

ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವು 564.7ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಮ: [ಸೂತ್ರದಸಹಾಯದಿಂದ]

$$AB = a \sin\theta \sin\phi \operatorname{cosec}(\phi - \theta)$$

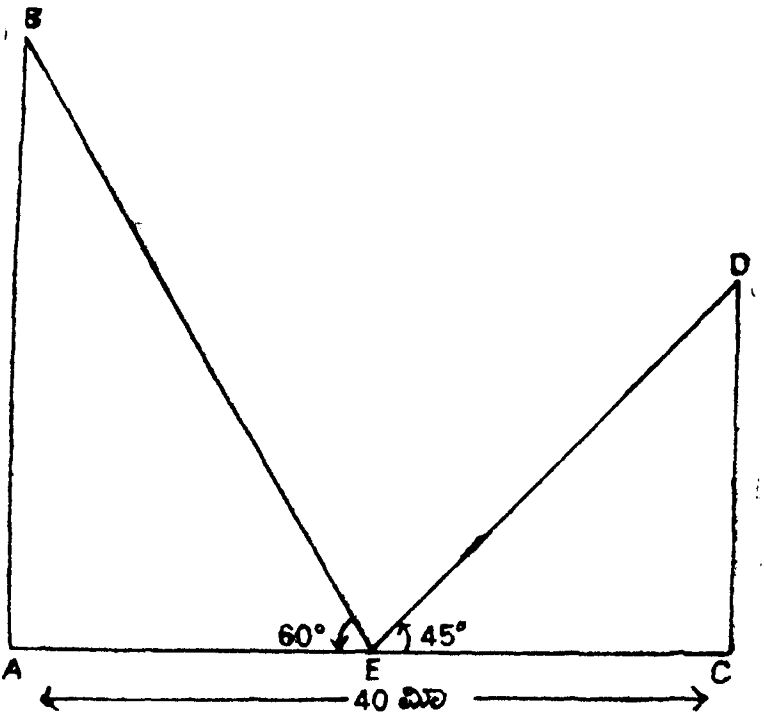
$$= a \sin 15^\circ \sin 75^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ$$

$$= 2 \times 0.25 \times 0.96 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{0{\cdot}96}{\sqrt{3}} = \frac{0.96}{1.7} = \frac{9{\cdot}6}{17}$$

$AB = 564.7$ಮೀ.

(2) ಎರಡು ಕಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 40ಮೀ. ಎರಡೂ ಕಂಬಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?



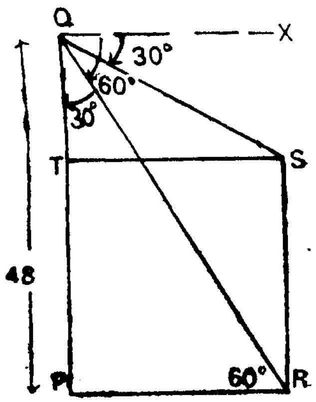
ಚಿತ್ರ 61

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{AE} = AB = AE \tan 60^\circ$$
$$= 20\sqrt{3} \text{ ಮೀ.}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{CE} \therefore DC = CE \tan 45^\circ$$
$$= 20 \times 1 = 20 \text{ಮೀ.}$$

$AB = 20\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು $DC = 20$ ಮೀ.

3) 48ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ, ಒಂದು ಕಂಬದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಶಿಖರದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 30° ಆದರೆ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ? ಗೋಪುರ ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 62

PQಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 48 ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ

$RS =$ ಕಂಬ

$\angle XQS = 30^\circ$, $\angle XQR = 60^\circ$

$\therefore \angle TQS = 30^\circ$,ಮತ್ತು $\angle TSQ = 30^\circ$ಹಾಗೂ $\angle PRQ = 60^\circ$

PQR ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ, $\tan 60^\circ \frac{PQ}{PR}$

$\therefore PR = \frac{PQ}{\tan 60^\circ} = \frac{48}{\sqrt{3}}$ ಮೀ.

$\therefore PR = \frac{48}{\sqrt{3}}$ ಮೀ.

$\therefore TS = PR = \frac{48}{\sqrt{3}}$ ಮೀ.

ಈಗ TSQ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ

$\tan 30^\circ \frac{TQ}{TS}$

$\therefore TQ = TS \tan 30^\circ$

$= \frac{48}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 16$ ಮೀ.

$\therefore$ RS=PQ−PT=48ಮೀ.—16ಮೀ.=32 ಮೀ.

$\therefore$ RS ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 32 ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12

(ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ)

1) ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ, ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತಕೋನವು 30° ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಿಂದ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವು $20\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆದರೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಹಾಗೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) ಸಮತಲ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಟೆಲಿಗ್ರಾಫ್ ಕಂಬದ ತುದಿಯು 20 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಪ್ರೇಕ್ಷಕನಿಗೆ 60° ಉನ್ನತ ಕೋನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಟೆಲಿಗ್ರಾಫ್ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

3) ಸಮತಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಒಂದು ದೇವಸ್ಥಾನದ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಕೋನವು 30° ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ನೇರದಲ್ಲಿ ದೇವ

ಸ್ಥಾನದ ಕಡೆಗೆ 50. ಮೀ. ಹೋದರೆ, ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ದೇವಸ್ಥಾನದ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

4) ಒಂದು ಏಣಿಯು, ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಗೋಡೆಗೆ ಬಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದವು ನೆಲದೊಡನೆ 30° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ. ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 25ಮೀ. ಆದರೆ ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಹಾಗೂ ಏಣಿಯ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಡೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವೆಷ್ಟು?

5) ಒಂದು ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು ಕಂಬದ ಎರಡರಷ್ಟು ಇದ್ದಾಗ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತ ಕೋನವೆಷ್ಟು?

6) ಎರಡು ವಿದ್ಯುತ್‌ಕಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 60ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅವೆರಡಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

7) ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಶಿಖರದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ, ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಶಿಖರದ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವು 20ಮೀ. ಆದರೆ ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

8) ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭವಿದೆ. ಕಟ್ಟಡದಿಂದ $26\sqrt{3}$ಮೀ. ದೂರದಿಂದ ನೋಡುವ ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಕಟ್ಟಡದ ಮತ್ತು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 45° ಎಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಹಾಗೂ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

9) ಒಂದು ಮರದ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಗಾಳಿಯಿಂದ ಮುರಿದು ಬಿದ್ದು ಕ್ಷಿತಿಜದೊಡನೆ 60° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ, ಮರದ ತುದಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜದೊಡನೆ ಸೇರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವು 18ಮೀ. ಆದರೆ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

10) ಒಂದು ಹೊಗೆಕೊಳವೆಯಿಂದ 80ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ, ಅದರ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಕೋನವು 30° ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೊಳವೆಯ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಹೊಗೆಕೊಳವೆಯ ತುದಿಯಿಂದ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವೆಷ್ಟು? ಮನುಷ್ಯನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಾರದು.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

ಅ)
1) $86^g\ 66'\ 66''$
2) $38^g\ 88'\ 88''$
3) $156^g\ 07'\ 77''$
4) $113^g\ 64'\ 44''$
5) $189^g\ 25'\ 55''$
6) $49''$
7) $13'\ 33''$
8) $14^g\ 68'\ 89''$
9) $80'$
10) $30^g\ 00'\ 92''$
11) $06^g\ 79'\ 86''$

ಆ)
1) $49°\ 30'$
2) $117°$
3) $100°\ 55'\ 01''$
4) $63°\ 13'\ 07''$
5) $58°\ 40'\ 51''$
6) $138°\ 34'\ 45''$
7) $04'\ 54''$
8) $42°\ 18'\ 10''$
9) $21°\ 11'\ 42''$
10) $02°\ 07'\ 30''$
11) $15°\ 47'\ 19''$
12) $32'\ 50''$

ಇ)
1) 0.903333 ಸಮಕೋನಗಳು
2) 0.730500 ಸಮಕೋನಗಳು
3) 0.141353 ಸಮಕೋನಗಳು
4) 2.033566 ಸಮಕೋನಗಳು
5) 0.009566 ಸಮಕೋನಗಳು
6) 0 002218 ಸಮಕೋನಗಳು
7) 0.153800 ಸಮಕೋನಗಳು
8) 0.044017 ಸಮಕೋನಗಳು
9) 0 625222 ಸಮಕೋನಗಳು
10) 0.110959 ಸಮಕೋನಗಳು

ಈ) $81b = 250a$

ಉ) $43°;\ 21°$

ಊ) $\frac{x}{9} = \frac{y}{10}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಅ)

1) $\frac{25}{24}$; $\frac{24}{27}$

2) $\frac{29}{21}$; $\frac{20}{29}$

3) $\cos \angle QPR = \frac{4}{5}$, $\tan \angle QPR = \frac{3}{4}$,

$\operatorname{cosec} \angle QPR = \frac{5}{3}$, $\sec \angle QPR = \frac{5}{4}$ ಮತ್ತು

$\cot \angle QPR = \frac{4}{3}$

4) $\sin \angle QPO = \frac{3}{15}$; $\cos \angle QPO = \frac{12}{15}$;

$\tan \angle QPO = \frac{3}{12}$; $\operatorname{cosec} \angle QPO = \frac{15}{3}$;

$\sec \angle QPO = \frac{15}{12}$ ಮತ್ತು $\cot \angle QPO = \frac{12}{3}$

5) 23. 7) 70 8) $\sin C = \frac{4}{5}$; $\tan C = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cosec} C = \frac{5}{4}$; $\sec C = \frac{5}{3}$ ಮತ್ತು $\cot C = \frac{3}{4}$

9) $\sin \angle PQO = \frac{6}{15}$; $\cos \angle PQO = \frac{13.7}{15}$, $\tan$

$\angle PQO = \frac{6}{13.7}$ $\operatorname{cosec} \angle PQO = \frac{15}{6}$; $\sec \angle PQO$

$= \frac{15}{13.7}$ ಮತ್ತು $\cot \angle PQO = \frac{13.7}{6}$

11) $4\operatorname{cosec}^2\theta$ 12) $\frac{x+y}{4xy}$ 13) $\frac{r^2+s^2}{s^2-r^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

ಅ) 1) $54^\circ\ 20'$ 4) 16.35°
2) $40^\circ\ 24'\ 44''$ 5) $89^\circ\ 04'\ 21''$
3) 8.5°

ಆ) $\angle R=80^\circ$, ಇ) $\angle C=70^\circ$ ಈ) $L=90^\circ$, $M=60^\circ$ ಮತ್ತು $N=30^\circ$.

ಉ) 9) $x=1$, 10) $x=0$

ಊ) 1) $\alpha=45^\circ$ 7) $B=\sin^{-1}(2/3)$; $B=\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$;
2) $\theta=30^\circ$
3) $\theta=90^\circ$ ಅಥವಾ 270°
8) $\theta=150/8$; $\phi=30/8$
4) $\beta=30^\circ$ 9) $A=-90^\circ$; $B=50^\circ$
5) $\phi=30^\circ$ 10) $\theta=6^\circ$; $\phi=12^\circ$
6) $A=60^\circ$ 11) $\alpha=30^\circ$; $\beta=30^\circ$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಆ)

ಅ) 1) 0.67236 7) 0.24317
2) 0.31316 8) 0.78834
3) 0.50478 9) 4.33148
4) 0.57170 10) 1.33588
5) 0.45994 11) 3.74198
6) 0.19509 12) 1.66950

ಆ) 1) $\alpha=62^\circ08'$ 4) $\phi=59^\circ08'$
2) $\beta=31^\circ28'$ 5) $A=79^\circ01'$
3) $\theta=59^\circ02'$ 6) $B=44^\circ07'$

ಅಭ್ಯಾಸ 4

ಅ)
1) 0.7854 ರೇಡಿಯನ್
2) 0.673214 ರೇಡಿಯನ್
3) 2.6180 ರೇಡಿಯನ್
4) 0.4376 ರೇಡಿಯನ್
5) 1.4084 ರೇಡಿಯನ್
6) 0.5454 ರೇಡಿಯನ್
7) 4.7124 ರೇಡಿಯನ್
8) 2.3550 ರೇಡಿಯನ್
9) 2.4437 ರೇಡಿಯನ್
10) 1.8326 ರೇಡಿಯನ್

ಆ)
1) 135°
2) 37.5°
3) 120°
4) 240°
5) 72°
6) 12°
7) 105°
8) 22.5°
9) 67.5°
10) 25.71°

ಇ) 333.3 ಸೆಂ. ಮೀ.
ಈ) 4.976 ಮೀ.
ಉ) 4.25 ರೇಡಿಯನ್
ಊ) 0.0000.5 ರೇಡಿಯನ್
ಋ) 18.5425 ಕಿ. ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

ಅ)
1) $\frac{17}{12}$
2) $\frac{1}{2}$
3) $\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$
4) $\frac{3}{8}$
5) $3\sqrt{3}$
6) $\frac{27}{8}$
7) $\frac{25}{4}$
8) $\frac{1+\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
9) $\sqrt{3}$
10) $-(1+\sqrt{3})$
11) $\frac{25}{4}$
12) 1
13) $\frac{9}{4}$
14) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
15) $\frac{28}{3}$

ಅಧ್ಯಾಯ 6

1) $A=C=45°$, $b=\sqrt{2}$ 2) $B=30°$, $C=60°$, $c=1$

3) $c=8$, $A=30°$, $B=60°$ 4) $b=4$, $A=60°$, $C=30°$

5) $A=60°$, $b=\frac{40}{\sqrt{3}}$, $c=\frac{20}{\sqrt{3}}$

6) $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $B=60°$

7) $C=30°$, $c=3$, $a=3\sqrt{3}$ 8) $c=1$, $C=30°$, $A=60°$

9) $B=60°$, $c=18\sqrt{3}$, $b=27$

10) $b=1.7$, $c=3.6$, $C=65°$

11) $A=90°$, $b=c=\sqrt{2}$ 12) $C=30°$, $c=2$, $a=2\sqrt{3}$

13) $a=353$, $B=50°24'$, $c=39°36'$

14) $A=C=45°$, $b=3\sqrt{2}$

15) $c=20$, $C=53°07'$, $A=36°53'$

16) $C=53°27'$, $b=10.05$, $c=\sqrt{65}$

17) $A=34°17'$, $a=2.8$, $c=\sqrt{17.16}$

18) $B=20°34'$

19) $C=50°36'$, $c=30.42$, $a=39.39$

20) $A=50°12'$, $b=131.6$, $C=100.5$

ಅಧ್ಯಾಯ 7 (ಅ)

1) 45°	6) 10°
2) 74°22′	7) 179° 00′01″
3) 109°11′25″	8) 34 5°
4) 30°	9) 57.75°
5) 81°10′25″	10) 69.25°

ಅಧ್ಯಾಯ 7 (ಅ)

ಅ) 1) -1 4) 0
2) $\tan A$ 5) 0
3) $\operatorname{Cosec}^2 A$

ಅಧ್ಯಾಯ 8 (ಅ)

ಅ) 1) $-1/\sqrt{2}$
2) 0.9659
3) -3.7320
4) 3.7320
5) 1.0352
6) -1.4281
7) (i) 0, (ii) $\frac{24}{5}$, (iii) ∞, (iv) $\frac{-7}{25}$
15) -2,
16) $-\frac{1}{2}$
17) $-\frac{1}{2}$
18) ∞
19) -2
20) 1.0352

ಅಧ್ಯಾಯ 8 (ಅ)

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $-\frac{7}{25}$

3) $-\frac{7}{5}$

4) $\frac{47}{49}$

5) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

6) $\sin 2\theta=\frac{28}{53}$; $\cos 2\theta=-\frac{45}{53}$

7) $\frac{22}{7}$

8) $\cos 3\beta=5$; $\cos 2\beta=23/2$

9) $\tan A=\frac{3}{4}$; $\tan 2A=\frac{24}{7}$;

$\tan 3A=-\frac{117}{44}$

10) $\cot(\alpha+\beta)=0$; $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{12}{35}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

ಅ) 1) $\sin 5\theta+\sin 3\theta$ 6) $\frac{1}{2}[\sin\alpha-\sin\alpha/4]$

2) $\sin 10\theta-\sin 4\theta$ 7) $\frac{1}{2}[\cos 3(\alpha+\beta)+\cos(\beta-\alpha)]$

3) $\cos 8\theta+\cos 4\theta$ 8) $\frac{1}{2}[\cos(6\theta+4\phi)-\cos(4\theta-6\phi)]$

4) $\cos 21\theta-\cos 5\theta$ 9) $\frac{1}{4}[\sin 10\alpha-\sin 8\alpha-\sin 4\alpha+\sin 2\alpha]$

5) $\frac{1}{2}[\cos A-\cos A/2]$ 10) $\frac{1}{4}[\cos 7\beta+\cos 5\beta+\cos 3\beta+\cos\beta]$

ಆ) 1) $2\sin 9A\cos 3A$ 6) $2\sin\alpha/2.\ \sin\beta/2$

2) $-2\cos 11\alpha.\ \sin 4\alpha$ 7) $-2\cos C/2.\ \sin C/4$

3) $2\cos 13\phi/2.\ \cos 3\phi/2$ 8) $-2\sin D/2\ \sin 3D/8$

4) $2\sin 11\beta.\ \sin 2\beta.$ 9) $2\sin\frac{(3\theta+\phi)}{2}\cos\frac{(3\phi-\theta)}{2}$

5) $2\sin\theta/2.\cos\phi/2$

10) $2\cos\frac{(2\alpha+\beta)}{4}\sin\frac{(3\beta+2\alpha)}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11 (ಅ)

1) $A=C=45^\circ$, $c=1$

2) $A=30^\circ$, $C=60^\circ$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $B=C=45^\circ$, $a=4\sqrt{2}$

4) $C=6$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$

5) $c=2$, $a=4$, $B=60^\circ$

6) $C=90^\circ$, $a=\frac{40}{\sqrt{3}}$, $c=\frac{80}{\sqrt{3}}$

7) $C=37^\circ$, $a=80$, $c=60$

8) $c=15\sqrt{3}$, $B=90^\circ$, $C=60^\circ$

9) $c=\sqrt{3}$, $C=60^\circ$, $A=30^\circ$

10) $A=60^\circ$, $a=5\sqrt{3}$, $b=5$

ಅಭ್ಯಾಸ 11 (ಆ)

1) $A=30^\circ$, $B=90^\circ$, $C=60^\circ$

2) $A=61^\circ58'$, $B=90^\circ$, $C=28^\circ06'$

3) $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$

4) $A=45^\circ$, $B=75^\circ$, $c=\sqrt{6}$

5) $a=4.8$, $B=28^\circ41'$, $C=46^\circ19'$

6) $C=30^\circ$, $a=2$, $b=2.7$

7) $A=45^\circ$, $B=60^\circ$, $C=75^\circ$

8) $A=59°50'$, $B=63°53'$, $c=56°17'$

9) $A=45°$, $C=25°$, $c=1.2$

10) $A=30°31'$, $B=24°29'$, $a=1.4$

ಅಭ್ಯಾಸ 12

1) 20ಮಿಾ., $20\sqrt{2}$ ಮಿಾ.

2) $20\sqrt{3}$ ಮಿಾ.

3) $50\sqrt{2}$ ಮಿಾ.

4) 12.25 ಮಿಾ., $25\frac{\sqrt{3}}{2}$ಮಿಾ.

5) $26°35'$

6) $10\sqrt{3}$ ಮಿಾ., $30\sqrt{3}$ ಮಿಾ.

7) 30 ಮಿಾ.

8) 25 ಮಿಾ., 42.5 ಮಿಾ.

9) 66.6ಮಿಾ.

10) $\frac{80}{\sqrt{3}}$ಮಿಾ., $\frac{160}{\sqrt{3}}$ಮಿಾ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ

ಅಧಿಕ ಕೋನ	Obtuse angle
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆ	Anti clock-wise direction
ಅವನತ ಕೋನ	Angle of depression
ಉನ್ನತಕೋನ	Angle of elevation
ಊರ್ಧ್ವಮುಖಿ ರೇಖೆ	Vertical line
ಕರ್ಣ	Hypotenuse
ಕೋನ	Angle
ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆ	Horizontal line
ತ್ರಿಜ್ಯ	Radius
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು	Trignometrical Ratios
ತ್ರಿಭುಜ	Triangle
ಪರಿಣಾಮನ (ಬದಲಾವಣೆ)	Variation
ಪರಿಭ್ರಮಣ	Revolution
ಪರಿಭ್ರಮಿಸು	Revolve
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆ	Clockwise direction
ಪ್ರಮಾಣ	Ratio
ಫಲನ	Function
ಬಿಡಿಸು	Solve
ಮಿಶ್ರಕೋನ	Compound angle
ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ	Radian system
ರೇಖಾಚಿತ್ರ	Graph
ಲಘುಕೋನ	Acute angle
ಲಘುಗಣಕ	Logarithm
ವ್ಯಾಸ	Diameter
ವೃತ್ತಪರಿಧಿ	Circumference
ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Centisimal system
ಷಡ್ವಶ ಅಥವಾ ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Sexagesimal system
ಸಮಕೋನ	Right angle
ಸಮಕೋನ ಪೂರಕಕೋನ	Complementary angle
ಸರಳಕೋನ	Straight angle
ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಕೋನ	Supplementary angle
ಸಾಧನೆ	Solution

ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. Hall, H.S., and Knight, S. R. **Elementary Trigonometry**
London ; Macmillan and Company Limited.
Metric Education, 1967.

2. Jambunathan M. V. **Pre University Trigonometry**
Mysore : M. J. S. Ram, First Edition, 1958.

3. Loney, S. L. **Plane Trigonometry**, London, : Macmillan
and Company Limited, Sixth Edition, 1963

4. ಪ್ರಾಣೇಶ್‌ರಾವ್. ಪಿ. ಆರ್. **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ**, ಮೈಸೂರು : ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ 1961.

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

	ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
1. ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	2-50	
2. ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	7-50	
3. ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ	15-00*	
4. ಕೀಟ ಹತೋಟಿ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	12-50	
5. ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-1	6-25	
6. ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	12-50*	
7. ಕೃಷಿ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	5-00	6-25*
8. ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	18-00	19-00
9. ರೈತರ ನೆಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	15-00	19-00
10. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-2	11-25	15-00
11. ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ	15-00	20-00
12. ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	15-00	19-00*
13. ಮಣ್ಣು	11-25	15-00*
14. ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	6-25	10-00*
15. ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	15-00	19-00
16. ಗೋಸಂಪತ್ತು	6-25	10-00*
17. ಧಾನ್ಯ ದಾಸ್ತಾನುತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	7-50	11-25
18. ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದಕತೆ	17-50	21-25*
19. ಪಶುವೈದಕೀಯ್ಯ ವಿಜ್ಞಾನ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	16-00
20. ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೆಲವು ಕೀಟಗಳು	8-25*	12-00*
21. ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	7-50*	12-50

* ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ.

	ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
22. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-3	10-00	15-00
23. ಕೃಷಿವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	11-25*	16-25*
24. ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	15-00	19-00
25. ಸಸ್ಯ ವರ್ಗೀಕರಣಶಾಸ್ತ್ರ	15-00	20-00
26. ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	16-00
27. ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	5-00	10-00
28. ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-75*	
29. ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50*	
30. ಶಿಶುವಿಹಾರ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	
31. ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50*	
32. ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮೀಕ್ಷಣೆ	9-50	14-00
33. ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	9-50	13-25
34. ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	21-50*	
35. ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	16-25*	
36. ಕ್ಯಾನಿಂಗ್–ಆಹಾರ ಜೋಪಾಸನೆಯ ಒಂದು ಆಧುನಿಕ ವಿಧಾನ	16-25	21-25
37. ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-75	
38. ಜೀವಕೋಶ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
39. ಎಲುಬು ಶಾಸ್ತ್ರ	11-25	16-25
40. ಕಡಲೆಕಾಯಿ	10-00	15-00
41. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ, ಭಾಗ–1	25-00	30-00
42. ತೆಂಗು, ಅಡಿಕೆ, ಇತರ ಗರಿಮರಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	9-00*	

	ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
43. ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12-00*	
44. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ	22-50	27-50
45. ಕಲ್ಲುನಾರು (ಭೂತಾಳೆ) ಗಿಡಗಳು	5-00	
46. ಎಣ್ಣೆಬೀಜ (ಕಾಳು)ಗಳ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50*	
47. ಹತ್ತಿ ನೂಲು, ಹಾಗೂ ನಾರಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-00	
48. ಹಸುರೆಲೆ ಗೊಬ್ಬರ, ಮೇವು ಹಾಗೂ ಉಪ್ಪು ನೇರಿಳೆ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	5-00	
49. ಮಾದಕ (ಹೊಗೆಸೊಪ್ಪು, ಗಾಂಜಾ) ಮತ್ತು ಸಾಂಬಾರ (ಅರಿಶಿನ ಇತ್ಯಾದಿ) ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	3-75	
50. ಕೃಷಿ ಉಪಯೋಗಿ ಕೆಲವು ವೃಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50	
51. ಸಸ್ಯಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ	25-00	30-00
52. ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	10-00	15-00
53. ಭಾರತೀಯ ಗ್ರಾಮೀಣ ಯುವಕ ರೈತ ಸಂಘಗಳ ಸಂಘಟಣೆ	8-25	13-25
54. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ, ಭಾಗ–2	20-00	25-00
55. ಸಾವಯುವ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ	15-00	19-00
56. ಪಶುರೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯ	12-50	17-50
57. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜೇನುಸಾಕಣೆ	20-00	25-00
58. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿ ಮೂಲದ ಸೋಂಕು ರೋಗಗಳು	7-50	12-00
59. ದೊಡ್ಡರೋಗ	5-00	
60. ಮೂಲ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	19-00	24-00
61. ಜೇನುಸಾಕಣೆ	17-50	22-50

	ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
62. ಕೃಷಿರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3-25	
63. ಮಣ್ಣು ನಿರ್ವಹಣೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಹಾಗೂ ಬೆಳೆ ಉತ್ಪಾದನೆ	20-00	25-00
64. ಕೃಷಿ ಅನಿಲಯಂತ್ರ ಹಾಗೂ ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರುಗಳು		60-00
65. ಸಹಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	18-00	23-00
66. ಕೋಶ	20-00	25-00
67. ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	12-50	19-00
68. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
69. ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ರೂಪಿಕೆಗಳು	19-00	22-00
70. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ	30-00	35-00
71. ಹುಲಿ-ಭಾರತದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗ	20-00	24-00
72. ನೀರಾವರಿ ತತ್ವ ಹಾಗೂ ಪದ್ಧತಿಗಳು	45-00	50-00
73. ಮಣ್ಣು ಶಿಲೀಂದ್ರ ಕೈಪಿಡಿ	45-00	50 50
74. ಪ್ರಾಣಿಗಳ ವರ್ತನೆ	17-00	22-00
75. ಬೆಳೆ ಕೀಟಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		125-00*
76. ಸಸ್ಯತಳಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ವಿಧಾನಗಳು		60-00
77. ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	17-00	22-00
78. ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಗಳಿಸಿರುವ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿಗಳು	8-50	
79. ಕೆಲವು ಸಸ್ಯಗಳ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕುಟುಂಬ, ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡ ಹೆಸರುಗಳು	15-00	20-00
80. ಮೀನು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಗರೋತ್ಪನ್ನ ಆಹಾರಗಳ ಶೀತ ಜೋಪಾಸನೆ	20-00	25-00
81. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಕೀಲು ಮತ್ತು ಸ್ನಾಯುಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
82. ಕುರಿಸಾಕಣೆ	8-00	13-00
83. ಜೋಳ	10-00	15-00
84. ಹಂದಿಯ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	35-00	40-00
85. ಆಧುನಿಕ ಹೈನಾಗಾರ ದನಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ	25-00	30-00
86. ದಾಸ್ತಾನು ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	8-00	

	ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
87. ಮನೆ ಕೀಟಗಳು ಇತರ ಪೀಡೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–00	
88. ಜಾನುವಾರು ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–00	
89. ತೆಂಗಿನ ಬೇಸಾಯ	9–00*	14–00*
90. ಆಹಾರ ರಕ್ಷಣೆ ಮತ್ತು ಕೆಡುವಿಕೆಯ ತತ್ವಗಳು	11–00	
91. ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಹಾಗೂ ವಿಧಾನಗಳು	17-00	
92. ಕೃಷಿಸಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	2–00	
93. ಹಸುರು ಸಸ್ಯದ ಜೀವನ	12–00	17 00
94. ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಚಯಾಪಚಯ (ಜೀವದ್ರವ್ಯ ಪರಿಣಾಮ) ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ರಚನೆ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಯ ಸಂಬಂಧ	18-00	
95. ವಿವಿಧ ಆಹಾರಗಳು ಕಲುಷಿತವಾಗುವಿಕೆ, ಕೆಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಣೆ	15-00	
96. ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಆಹಾರಗಳು ಮತ್ತು ರಾಸಾಯನಿಕ ಕಿಣ್ವಗಳು	7-00	
97. ರೋಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆಹಾರಗಳು	5-00	
98. ಆಹಾರದ ನೈರ್ಮಲ್ಯ ನಿಯಂತ್ರಣ ಮತ್ತು ತನಿಖೆ	7–00	
99. ಕೃಷಿಕರ್ನಾಟಕ	12–50	17-50
100. ದಾಸ್ತಾನು, ಮನೆ, ಜಾನುವಾರು ಹಾಗೂ ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		35–00
101. ಮತ್ಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ		50-00
102. ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ತರಕಾರಿ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	35-00	40-00
103. ಫಾರ್ಮ್ ನಿರ್ವಹಣೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ		60 00
104. ಆಹಾರಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ		62–50
105. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾಜಿಕ ಅರಣ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ	25–00	35-00
106. ಬತ್ತದ ಬೇಸಾಯ	15-00	25-00
107. ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳ ರೋಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12-00	17-00
108. ವ್ಯವಸಾಯ ಮುನ್ನಡೆ	18-00	28–00

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
109.	ಕೀಟಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3-50	
110.	ಸಚಿತ್ರ ಬತ್ತದ ಬೆಳೆ	12-50	22-50
111.	ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ ಕೈಪಿಡಿ	10-00	20–00
112.	ಮಣ್ಣು ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರ	10–00	20-00
113.	ಭೂಸಾರ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	7-50	17-50
114.	ಬಿಳಿಕಸ	9-00	19-00
115.	ವೈರಸ್‌ಗಳು	7–50	
116.	ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿ ಶರೀರಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	30-00
117.	ಲವಂಗ	3-50	
118.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಉತ್ಪರಿವರ್ತನೆ ಹಾಗೂ ಅನುವಂಶೀಯ ಗುಣಗಳ ಪುನರ್‌ಸಂಯೋಜನೆ	15-00	
119.	ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮತ್ತು ವಿವರಣೆ	25-00	
120.	ಎಣ್ಣೆ ಕೊಡುವ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಸಸ್ಯಗಳು	12–00	22–00
121.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಪರಿಸರಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸೋಂಕು ರಕ್ಷಣಾಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	
122.	ಕೃಷಿಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಉಪಕರಣಗಳು		80-00
123.	ಸಸ್ಯಪೋಷಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪಾತ್ರ	10-00	20-00
124.	ಮೆಣಸು-ಕಪ್ಪು ಹೊನ್ನು	9–50	19–00
125.	ಮಾನವ ಕಲ್ಯಾಣಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಬಳಕೆ	5-00	
126.	ಕೃಷಿಪ್ರಸರಣೆ	25-00	3-00
127.	ರೇಷ್ಮೆ ವ್ಯವಸಾಯ	20-00	30–00
128.	ಕೃಷಿ ಆರ್ಥಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ	25-00	35-00
129.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	12-00	22-00
130.	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	15-00	25-00